

## Wykład 9

**Zadanie** Zbadać, czy forma:

$$g(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona.

**Rozwiązanie** Wystarczy zbadać, czy dodatnie są minory główne, a więc wyznaczniki:

$$\begin{aligned} G_1 &= 1 \\ G_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0 \\ G_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -25 < 0 \end{aligned}$$

To oznacza, że ta forma nie jest dodatnio określona. Rzeczywiście  $g(1, 1, -2) = -10 < 0$ .

### Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej

Niech  $g$  będzie formą kwadratową w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , wtedy  $g$  może być zapisane w postaci:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i=1, j=1, i < j}^n g_{ij}x_i x_j$$

w przedstawieniu tym mogą występować elementy po  $x_i x_j$ . Zadanie sprowadzania do postaci kanonicznej polega więc na "pozbywaniu się" tych elementów. Dokładniej mówiąc zadanie to polega na szukaniu zmiennych  $y_1, y_2, \dots, y_n$  zależnych liniowo od  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dla których forma kwadratowa  $g$  ma przedstawienie:

$$g(y_1, \dots, y_n) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2$$

Istnieje kilka metod sprowadzania do postaci kanonicznej. Tutaj omówimy dwie podstawowe: metodę Lagrange'a i metodę Jacobiego.

## Metoda Lagrange'a

Metoda Lagrange'a wykorzystuje uogólnienie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy elementów, a mianowicie:

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + 2 \sum_{i=1, j=1, i < j} b_i b_j$$

Metodę tą omówimy na przykładzie. Niech

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

wtedy możemy zebrać elementy, które zawierają  $x_1$  i otrzymujemy:

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3) - x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_2x_3$$

następnie "wyciągamy kwadrat" zgodnie z powyższym wzorem:

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 - x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_2x_3$$

stąd

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3$$

dalej postępujemy podobnie jak powyżej z "kawałkiem" zawierającym tylko zmienne  $x_2, x_3$ , a więc:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3) + x_3^2 = \\ &= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{1}{6}x_3^2 + x_3^2 = \\ &= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{7}{6}x_3^2 \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy teraz  $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3$ ,  $y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$ ,  $y_3 = x_3$  to otrzymamy:

$$g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{7}{6}y_3^2$$

otrzymane przedstawienie jest więc postacią kanoniczną naszej formy.

## Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego polega na wykorzystaniu algorytmu podobnego do algorytmu ortogonalizacji *Grama – Schmidta*. Omówimy tą metodę na tym samym przykładzie co poprzednio:

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

wtedy w bazie kanonicznej macierz tej formy jest następująca:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Szukamy bazy  $b_1, b_2, b_3$  takiej, że  $f(b_i, b_j) = 0$  jeśli  $i \neq j$ . Bazę tą szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} b_1 &= e_1 \\ b_2 &= e_2 + k_{12}b_1 \\ b_3 &= e_3 + k_{13}b_1 + k_{23}b_2 \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku ortogonalizacji *Grama – Schmidta* otrzymujemy  $k_{ij} = -\frac{f(b_i, e_j)}{f(b_i, b_i)}$ , a więc:

$$k_{12} = -\frac{f(b_1, e_2)}{f(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2}$$

i

$$b_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1, 0\right]$$

dalej mamy:

$$k_{13} = -\frac{f(b_1, e_3)}{f(b_1, b_1)} = 1, k_{23} = -\frac{f(b_2, e_3)}{f(b_2, b_2)} = -\frac{1}{3}$$

stąd:

$$b_3 = \left[\frac{7}{6}, -\frac{1}{3}, 1\right]$$

ponadto  $f(b_3, b_3) = \frac{7}{6}$ . Wtedy postać kanoniczna naszej formy dwuliniowej jest następująca:

$$f(y_1, y_2, y_3) = f(b_1, b_1)y_1^2 + f(b_2, b_2)y_2^2 + f(b_3, b_3)y_3^2 = 2y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{7}{6}y_3^2$$

i jeśli przez  $A$  oznaczymy macierz przejścia od bazy kanonicznej do bazy  $b_1, b_2, b_3$  to otrzymamy związek między zmiennymi  $x_1, x_2, x_3$ , a zmiennymi  $y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

W naszym przypadku:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wtedy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i mamy:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Można zauważyć, że współczynniki  $f(b_i, b_i)$  (występujące przy  $y_i^2$ ) są równe  $\frac{\det G_{i-1}}{\det G_i}$ , gdzie  $\det G_0 = 1$ , a  $\det G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  są minorami głównymi macierzy  $G$ .

Metoda Jacobiego ma pewne ograniczenia, jeśli bowiem któryś ze współczynników  $f(b_i, b_i)$  jest równy zero to nie można wyznaczyć odpowiednich  $k_{ij}$ . Z tego co zostało powiedziane powyżej metoda Jacobiego działa wtedy gdy każdy z minorów głównych macierzy  $G$  jest różny od 0.

Na zakończenie naszych rozważań dotyczących przestrzeni euklidesowych i unitarnych zdefiniujemy pojęcie sprzężenia odwzorowania liniowego. Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową (unitarną) i niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie homomorfizmem przestrzeni  $V$ , wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\varphi^*$ , taki że dla każdego  $u, v \in V$ :

$$(\varphi(u)|v) = (u|\varphi^*(v))$$

Operator  $\varphi^*$  nazywamy operatorem sprzężonym z operatorem  $\varphi$ .

Jeśli  $V = \mathbb{C}^n$  jest przestrzenią unitarną ze standardowym iloczynem skalarnym i  $A$  jest macierzą operatora  $\varphi$  to  $A^*$  jest macierzą operatora  $\varphi^*$ .