

Wykład 7

Mówimy, że wektor v jest ortogonalny do wektora w jeśli $(v|w) = 0$ i piszemy $v \perp w$. Niech V będzie przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$ i niech w_1, w_2, \dots, w_n będzie bazą tej przestrzeni. Będziemy mówić, że baza w_1, w_2, \dots, w_n jest ortogonalna jeśli:

$$(w_i|w_j) = 0 \text{ dla } i \neq j$$

Bazę w_1, w_2, \dots, w_n nazywamy bazą ortonormalną jeśli jest bazą ortogonalną i dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $(w_i|w_i) = 1$ (to znaczy długość każdego wektora jest równa 1).

Przykład Niech $V = \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym:

$$((x_1, x_2, \dots, x_n)|(y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Wtedy baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ jest bazą ortonormalną tej przestrzeni.

Pytanie, które tutaj się pojawia jest następujące: czy w każdej skończonej wymiarowej przestrzeni euklidesowej można znaleźć przynajmniej jedną bazę ortogonalną (ortonormalną)? Odpowiedź brzmi tak. Do znajdowania takich baz służy tak zwana metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Niech v_1, v_2, \dots, v_n będzie dowolną bazą przestrzeni euklidesowej V . Opierając się na tej bazie zbudujemy nową bazę w_1, w_2, \dots, w_n , która będzie ortogonalna. Bazę tą budujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 + k_{12}w_1 \\ w_3 &= v_3 + k_{13}w_1 + k_{23}w_2 \\ w_4 &= v_4 + k_{14}w_1 + k_{24}w_2 + k_{34}w_3 \\ &\vdots \\ w_n &= v_n + k_{1n}w_1 + k_{2n}w_2 + \dots + k_{nn}w_n \end{aligned}$$

Wektor w_1 mamy już określony. Wyznamy wektor w_2 . Ponieważ nowa baza ma być ortogonalna to musi być spełniony warunek: $(w_2|w_1) = 0$. Korzystając z własności iloczynu skalarnego obliczamy:

$$0 = (w_2|w_1) = (v_2 + k_{12}w_1|w_1) = (v_2|w_1) + k_{12}(w_1|w_1)$$

stąd otrzymujemy:

$$k_{12} = -\frac{(v_2|w_1)}{(w_1|w_1)}$$

Wyznamy teraz wektor w_3 . Ponieważ wektor ten jest ortogonalny do wektora w_1 to otrzymujemy (korzystając z faktu, że $(w_2|w_1) = 0$):

$$0 = (w_3|w_1) = (v_3 + k_{13}w_1 + k_{23}w_2|w_1) = (v_3|w_1) + k_{13}(w_1|w_1) + k_{23}(w_2|w_1) = (v_3|w_1) + k_{13}(w_1|w_1)$$

stąd:

$$k_{13} = -\frac{(v_3|w_1)}{(w_1|w_1)}$$

Współczynnik k_{23} wyznaczymy z równości $(w_3|w_2) = 0$ i $(w_3|w_1) = 0$:

$$0 = (w_3|w_2) = (v_3 + k_{13}w_1 + k_{23}w_2|w_2) = (v_3|w_2) + k_{13}(w_1|w_2) + k_{23}(w_2|w_2) = (v_3|w_2) + k_{13}(w_1|w_2)$$

zatem:

$$k_{23} = -\frac{(v_3|w_2)}{(w_2|w_2)}$$

Postępując podobnie z dalszymi wektorami otrzymamy:

$$k_{ij} = -\frac{(v_j|w_i)}{(w_i|w_i)}$$

W ten sposób otrzymujemy nową bazę w_1, w_2, \dots, w_n , która jest ortogonalna. Aby otrzymać bazę ortonormalną wystarczy każdy z wektorów podzielić przez jego długość, to znaczy bazą ortonormalną jest układ:

$$\frac{1}{\|w_1\|}w_1, \frac{1}{\|w_2\|}w_2, \dots, \frac{1}{\|w_n\|}w_n$$

Rzeczywiście:

$$\left(\frac{1}{\|w_i\|}w_i \mid \frac{1}{\|w_i\|}w_i \right) = \left(\frac{1}{\|w_i\|} \right)^2 (w_i|w_i) = \left(\frac{1}{\|w_i\|} \right)^2 \|w_i\|^2 = 1$$

Przykłady

(1) W przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 z iloczynem skalarnym

$$((x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2 + y_2 + x_3y_3$$

ortogonalizować, metodą Grama-Schmidta, bazę $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (3, 1, 2)$. Zgodnie z naszym algorytmem nowa baza będzie postaci:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 + k_{12}w_1 \\ w_3 &= v_3 + k_{13}w_1 + k_{23}w_2 \end{aligned}$$

gdzie:

$$k_{12} = -\frac{(v_2|w_1)}{(w_1|w_1)} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

zatem $w_2 = (2, 1, 0) - \frac{2}{7}(1, 2, 3) = (\frac{12}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7})$. Obliczmy dalsze współczynniki:

$$k_{13} = -\frac{(v_3|w_1)}{(w_1|w_1)} = -\frac{11}{14}$$
$$k_{23} = -\frac{(v_3|w_2)}{(w_2|w_2)} = -\frac{\frac{27}{7}}{\frac{189}{49}} = -1$$

stąd otrzymujemy:

$$w_3 = (3, 1, 2) - \frac{11}{14}(1, 2, 3) - \left(\frac{12}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

(2) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}[x]_2$ z iloczynem skalarnym:

$$(f(x)|g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

ortogonalizować bazę $v_1(x) = x, v_2(x) = x + 2, v_3(x) = x^2 - 1$. Nowa baza będzie postaci:

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = v_2 + k_{12}w_1$$
$$w_3 = v_3 + k_{13}w_1 + k_{23}w_2$$

Obliczmy

$$(w_1|w_1) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

oraz:

$$(v_2|w_1) = \int_{-1}^1 x(x+2)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + x^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Zatem

$$k_{13} = -\frac{(v_3|w_1)}{(w_1|w_1)} = -1$$

i mamy:

$$w_2 = 2$$

Obliczmy teraz

$$(v_3|w_1) = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

to oznacza, że $k_{13} = 0$. Dalej obliczymy:

$$(v_3|w_2) = \int_{-1}^1 2(x^2 - 1)dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 - 2x\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3}$$

$$(w_2|w_2) = \int_{-1}^1 4dx = 4x\Big|_{-1}^1 = 8$$

Stąd

$$k_{23} = -\frac{(v_3|w_2)}{(w_2|w_2)} = \frac{5}{12}$$

Zatem $w_3(x) = x^2 - 1 + \frac{5}{6}$.

Trzeba zwrócić uwagę na następujący ważny fakt wynikający z ortogonalizacji. Jeśli v_1, v_2, \dots, v_n jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej V i jeśli w_1, w_2, \dots, w_n jest ortogonalizacją tej bazy (w sensie Grama-Schmidta) to dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ podprzestrzenie generowane przez wektory v_1, \dots, v_i i przez wektory w_1, \dots, w_i są równe, czyli:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Lin}(v_1, \dots, v_i) = \text{Lin}(w_1, \dots, w_i)$$

Niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni euklidesowej V . Wtedy dopełnieniem ortogonalnym zbioru A nazywamy zbiór wszystkich wektorów $v \in V$, takich że dla każdego $a \in A$ mamy $a \perp v$. Dopełnienie ortogonalne zbioru A oznaczamy przez A^\perp , czyli

$$A^\perp = \{v \in V : \forall a \in A \quad (a|v) = 0\}$$

Twierdzenie 1 *Jeśli A jest niepustym podzbiorem przestrzeni euklidesowej V to A^\perp jest podprzestrzenią przestrzeni V .*

Dowód Niech $v, w \in A^\perp$ wtedy dla każdego $a \in A$ mamy $(a|v) = 0$, $(a|w) = 0$. Wtedy dla każdego $a \in A$ mamy $(a|v + w) = (a|v) + (a|w) = 0 + 0 = 0$, a więc $v + w \in A^\perp$. Podobnie dla każdego $a \in A$ i dla każdego $k \in \mathbb{R}$ mamy $(a|kv) = k(a|v) = 0$, a więc również $kv \in A^\perp$. \square

Nietrudno jest zauważyć, że:

- (1) $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$,
- (2) $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Twierdzenie 2 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V . Wtedy $V = W \oplus W^\perp$, a więc:*

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

Dowód Niech a_1, \dots, a_s będzie bazą przestrzeni W , wtedy można tę bazę uzupełnić do bazy całej przestrzeni V . Niech $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n$ będzie bazą przestrzeni V . Wtedy bazę tę można ortogonalizować metodą Grama-Schmidta. Niech $b_1, \dots, b_s, b_{s+1}, \dots, b_n$ będzie odpowiednią ortogonalizacją. Zgodnie z uwagą powyżej wektory b_1, \dots, b_s stanowią bazę przestrzeni W . Nietrudno jest zauważyć, że wektory b_{s+1}, \dots, b_n należą do W^\perp . To oznacza, że $V = W + W^\perp$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że $W \cap W^\perp = \{0\}$. Rzeczywiście jeśli $x \in W \cap W^\perp$ to ponieważ $x \in W$ i $x \in W^\perp$ musimy mieć $(x|x) = 0$, a to jest możliwe tylko wtedy gdy $x = 0$ (patrz aksjomaty iloczynu skalarnego). \square

Pokażemy jeszcze jedną ważną własność dopełnień. Jeśli W jest podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V to

$$(W^\perp)^\perp = W$$

Zawieranie $W \subset (W^\perp)^\perp$ jest spełnione zawsze (nie potrzebne jest założenie o skończonym wymiarze przestrzeni V), bo jeśli $x \in W$ to x jest ortogonalne do każdego elementu przestrzeni W^\perp , a więc $x \in (W^\perp)^\perp$. Zauważmy teraz, że zgodnie z powyższym Twierdzeniem mamy:

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp = \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp$$

a to oznacza, że $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$ i ponieważ $W \subset (W^\perp)^\perp$ to mamy $W = (W^\perp)^\perp$.