Wykład 6

Iloczyn skalarny

Niech K będzie ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, wtedy funkcję:

$$S : V \times V \to K$$

nazywamy iloczynem skalarnym jeśli $\forall u, v, w \in V, k \in K$:
1. $S(u, v) = \overline{S(v, u)}$,
2. $S(u + v, w) = S(u, w) + S(v, w)$,
3. $S(ku, v) = kS(u, v)$,
4. $S(u, u) \geqslant 0$ i jeśli $S(u, u) = 0$ to $u = 0$.

Zwykle zamiast pisać $S(u, v)$ będziemy pisać $(u|v)$.

Przykłady
1. W przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ iloczynem skalarnym jest funkcja:

$$((x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

2. W tej samej przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ iloczynem skalarnym jest również funkcja:

$$((x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} i x_i y_i$$

3. W przestrzeni $V = \mathbb{R}^n$ iloczynem skalarnym jest funkcja:

$$((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

4. W przestrzeni $\mathcal{C}(a, b)$ funkcji ciągłych na odcinku (a, b) funkcja:

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

jest iloczynem skalarnym.
5. W przestrzeni $V = \mathbb{C}^3$ iloczynem skalarnym jest funkcja:

$$((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y_i}$$

Przestrzeń liniową V nad ciałem $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym nazywać będziemy **przestrzenią euklidesową**, a przestrzeń liniową V nad ciałem $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym nazywać będziemy **przestrzenią unitarną**.

Twierdzenie 1 *Jesli* V *jest przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym* $(\cdot|\cdot)$ *to:*
(i) $\forall v \ \ (0|v) = (v|0) = 0,$
(ii) $\forall u, v \ \ (u|v + w) = (u|v) + (u|w),$
(iii) *jeśli* $(u|v) = 0$ *to wektory* u *i* v *są liniowo niezależne,*
(iv) $\forall u, v, k \in \mathbb{R} \ \ (u|kv) = k(u|v),$
(v) $\forall u, v \ \ (u|v)^2 \leqslant (u|u)(v|v)$ *(nierówność Cauchy-Buniakowskiego-Schwartza).*