

Wykład 5

Niech $f : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowych. Wtedy jądrem przekształcenia nazywamy zbiór tych elementów z V , których obrazem jest wektor zerowy w przestrzeni W . Jądro przekształcenia oznaczamy przez $\text{Ker}(f)$, czyli mamy:

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V; f(v) = \mathbf{0}\}$$

Obrazem przekształcenia f nazywamy zbiór wszystkich obrazów wektorów z przestrzeni V i oznaczamy go przez $\text{Im}(f)$, a więc:

$$\text{Im}(f) = \{f(v); v \in V\}$$

Zgodnie z tym co było powiedziane na jednym z poprzednich wykładów $\text{Ker}(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V , a $\text{Im}(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W . Jeśli V jest podprzestrzenią skończonego wymiaru to zachodzi związek:

$$\dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Rzeczywiście jeśli v_1, v_2, \dots, v_k jest bazą przestrzeni $\text{Ker}(f)$ to można ją uzupełnić do bazy przestrzeni V , zatem istnieje baza przestrzeni V o postaci $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n$. Wystarczy więc udowodnić, że wymiar obrazu jest równy n . Pokażemy, że bazą obrazu są wektory $f(u_1), \dots, f(u_n)$. Jeśli u należy do obrazu to istnieje wektor $v \in V$, że $u = f(v)$ element v można zapisać jako liniową kombinację wektorów bazowych:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$$

stąd mamy:

$$u = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \beta_1 f(u_1) + \dots + \beta_n f(u_n)$$

i ponieważ wektory v_i należą do jądra to $f(v_i) = \mathbf{0}$ i otrzymujemy

$$u = f(v) = \beta_1 f(u_1) + \dots + \beta_n f(u_n),$$

a to oznacza, że $\text{Im}(f) = \text{Lin}(f(u_1), \dots, f(u_n))$. Musimy pokazać jeszcze, że wektory $f(u_1), \dots, f(u_n)$ są liniowo niezależne. Rozpatrzmy równanie:

$$k_1 f(u_1) + \dots + k_n f(u_n) = \mathbf{0}$$

z własności przekształcenia liniowego mamy: $f(k_1 u_1 + \dots + k_n u_n) = \mathbf{0}$, a to oznacza, że $k_1 u_1 + \dots + k_n u_n \in \text{Ker}(f)$ ponieważ wektory u_1, \dots, u_n są

niezależne od wektorów generujących jądro to nasza liniowa kombinacja należy do jądra tylko wtedy gdy $k_1 = \dots = k_n = 0$, a więc wektory są liniowo niezależne.

Pokażemy teraz, że różnowartościowość przekształcenia liniowego zależy od jądra tego przekształcenia.

Twierdzenie 1 *Niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowych. Przekształcenie f jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy gdy $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.*

Dowód

(\Rightarrow) Ponieważ $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ to z różnowartościowości wynika, że jeśli $f(v) = \mathbf{0}$ to $v = \mathbf{0}$, a więc jądro składa się tylko z wektora zerowego.

(\Leftarrow) Musimy udowodnić, że jeśli $f(v) = f(u)$ to $v = u$. Rzeczywiście jeśli $f(v) = f(u)$ to z własności przekształcenia liniowego wynika, że $f(u-v) = \mathbf{0}$, a więc $u-v \in \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ zatem $u-v = \mathbf{0}$ i mamy $u = v$.

Przekształcenie liniowe będziemy nazywać **nieosobliwym** jeśli $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Twierdzenie 2 *Niech V będzie przestrzenią liniową o skończonym wymiarze i niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni V w siebie. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) f jest bijekcją,
- (ii) f jest suriekcją,
- (iii) f jest iniekcją.

Dowód Ponieważ V jest skończone wymiarową przestrzenią liniową i f przekształca V w V więc jądro i obraz są podprzestrzeniami V i jest spełniona udowodniona wcześniej równość:

$$\dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Oczywiście z faktu, że f jest bijekcją wynika, że f jest suriekcją.

Jeśli f jest suriekcją to $\text{Im}(f) = V$, a więc $\dim \text{Im}(f) = \dim V$ i z powyższego wzoru otrzymujemy, że $\dim \text{Ker}(f) = 0$ a to oznacza, że $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ i na podstawie poprzedniego twierdzenia f jest funkcją różnowartościową (=iniekcją).

Jeśli f jest iniekcją to na podstawie poprzedniego twierdzenia i na podstawie powyższego wzoru otrzymujemy $\dim \text{Im}(f) = \dim V$, a więc $\text{Im}(f) = V$, czyli f jest również suriekcją, a więc jest bijekcją.

Twierdzenie to oznacza, że przekształcenie $f : V \rightarrow V$ przestrzeni skończonej wymiarowej w siebie jest nieosobliwe wtedy i tylko wtedy gdy jest izomorfizmem.

Rzędem przekształcenia liniowego f nazywamy wymiar obrazu tego przekształcenia i oznaczamy go przez $r(f)$, a więc:

$$r(f) := \dim \operatorname{Im}(f)$$

Jeśli dziedziną f jest przestrzeń skończonego wymiaru to na podstawie wcześniej udowodnionego wzoru mamy:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + r(f)$$

Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem i niech $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ będą przekształceniami liniowymi wtedy złożenie: $g \circ f : U \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni u w przestrzeń W .

Rzeczywiście jeśli $u_1, u_2 \in U$ to mamy

$$\begin{aligned} g \circ f(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = g \circ f(u_1) + g \circ f(u_2). \end{aligned}$$

Drugą własność przekształceń liniowych udowadnia się podobnie.

Twierdzenie 3 *Jeśli $f : U \rightarrow V$ i $g : V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi to:*

$$r(g \circ f) \leq \min(r(f), r(g))$$

Dowód Jeśli $V_1 \subset V_2$ to $g(V_1) \subset g(V_2)$ i ponieważ $f(U) \subset V$ to mamy również $g \circ f(U) = g(f(U)) \subset g(V)$, a zatem $r(g \circ f) \leq r(g)$.

Niech przekształcenie liniowe $f : V \rightarrow W$ będzie bijekcją wtedy istnieje funkcja f^{-1} odwrotna do f i funkcja f^{-1} jest przekształceniem liniowym $W \rightarrow V$. Rzeczywiście niech w_1, w_2 należą do W . Ponieważ f jest suriekcją to istnieją $v_1, v_2 \in V$, że $w_1 = f(v_1)$ i $w_2 = f(v_2)$ i mamy:

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = \\ &= f^{-1} \circ f(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

i podobnie można udowodnić drugą z potrzebnych własności.

Oznaczmy przez $\operatorname{Aut}(V)$ zbiór wszystkich izomorfizmów przestrzeni V na siebie. Wtedy:

Twierdzenie 4 *Zbiór $\text{Aut}(V)$ wraz z działaniem składania przekształceń jest grupą.*

Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a W niech będzie przestrzenią liniową z bazą $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ i niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni V w W wtedy obraz każdego v_i da się zapisać jako kombinacja liniowa bazy przestrzeni W :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= k_{11}w_1 + k_{21}w_2 + \dots + k_{m1}w_m \\ f(v_2) &= k_{12}w_1 + k_{22}w_2 + \dots + k_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= k_{1n}w_1 + k_{2n}w_2 + \dots + k_{mn}w_m \end{aligned}$$

możemy utworzyć macierz złożoną ze współczynników z prawej strony:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz tą nazywamy macierzą przekształcenia f w bazach A i B . Macierz ta (jeśli mamy ustalone bazy) daje nam wszystkie możliwe informacje o przekształceniu. Jeśli mamy daną macierz przekształcenia to możemy wyznaczyć obraz dowolnego wektora.

Twierdzenie 5 *Jeśli V i W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K , $\dim V = n$, $\dim W = m$, A i B są ustalonymi bazami tych przestrzeni to przyporządkowanie każdemu przekształceniu $f : V \rightarrow W$ macierzy $M_f \in M_{m,n}(K)$ w tych bazach wyznacza izomorfizm przestrzeni $\text{Hom}(V, W)$ na przestrzeń $M_{m,n}(K)$, to znaczy jeśli $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ i $k \in K$ to:*

$$\begin{aligned} M_{f+g} &= M_f + M_g \\ M_{kf} &= kM_f \end{aligned}$$

Dane są trzy przestrzenie V, W, U i bazy tych przestrzeni A, B, C . Jeśli f jest przekształceniem liniowym przestrzeni V w W , a g jest przekształceniem liniowym W w U i jeśli M_f, M_g są macierzami tych przekształceń w powyższych bazach to macierzą złożenia $g \circ f$ w bazach odpowiednio A i C jest iloczyn macierzy $M_g M_f$, mamy zatem:

$$M_{g \circ f} = M_g M_f$$

W przypadku gdy przestrzenie W i V są równe to przeważnie szukając macierzy przekształcenia ustalamy w dziedzinie i w przeciwdziedzinie tą samą bazę. Mówimy wtedy o macierzy przekształcenia w bazie. Szczególnie prostym przypadkiem jest gdy przestrzeń V nad ciałem K jest równa K^n i gdy jako bazę wybierzemy bazę kanoniczną: $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Wtedy jeśli A jest macierzą przekształcenia $f : K^n \rightarrow K^n$ w bazie kanonicznej i $v = (k_1, \dots, k_n) \in K^n$ jest dowolnym wektorem to obraz wektora otrzymujemy przez mnożenie:

$$f(v) = A \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Wtedy jądro przekształcenia składa się z wektorów $v = (k_1, \dots, k_n)$, które spełniają równanie:

$$f(v) = A \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

i wymiar jądra jest równy $n - r(A)$, gdzie $r(A)$ jest rzędem macierzy, $r(f) = r(A)$.

Macierz zmiany bazy

Niech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ będą dwiema bazami przestrzeni V . Każdy element bazy B można zapisać w postaci liniowych kombinacji wektorów z bazy A :

$$\begin{aligned} b_1 &= k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \dots + k_{n1}a_n \\ b_2 &= k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \dots + k_{n2}a_n \\ &\vdots \\ b_n &= k_{1n}a_1 + k_{2n}a_2 + \dots + k_{nn}a_n \end{aligned}$$

wtedy macierz

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą przejścia od bazy A do bazy B .

Zadanie W przestrzeni \mathbb{R}^3 wyznaczyć macierz przejścia od bazy $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$

do bazy $(1, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1)$. Nieformalnie można zapisać równość:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 6 *Jeśli P jest macierzą przejścia od bazy A do bazy B to macierz przejścia od bazy B do bazy A jest równa P^{-1} .*

Pojęcie macierzy przejścia od jednej bazy do drugiej pozwala nam stwierdzić jak otrzymać macierz danego przekształcenia liniowego w innej bazie. Niech A i B będą bazami przestrzeni liniowej V , niech M_f będzie macierzą operatora liniowego $f : V \rightarrow V$ w bazie A i niech P oznacza macierz przejścia od bazy A do bazy B . Wtedy macierz G_f przekształcenia f w bazie B jest równa:

$$G_f = P^{-1}M_fP$$

Przykład Dana jest macierz przekształcenia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie kanonicznej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz tego przekształcenia w bazie $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$. Niech w zbiorze $M_n(K)$ będzie określona następująca relacja jeśli $M, N \in M_n(K)$ to

$$M \sim N \iff \exists P M = P^{-1} N P$$

wtedy ta relacja jest relacją równoważności, a klasa abstrakcji $[M]_{\sim}$ określa zbiór macierzy, które są macierzami tego samego przekształcenia liniowego w różnych bazach.

Jeśli f jest przekształceniem liniowym pewnej skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej V , a M_f jest macierzą tego przekształcenia w pewnej bazie to f jest przekształceniem odwracalnym wtedy i tylko wtedy gdy M_f jest macierzą odwracalną (to znaczy wtedy i tylko wtedy gdy $\det M_f \neq 0$).