

## Wykład 4

Udowodnimy teraz, że jeśli  $U, W$  są podprzetrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni  $V$  to zachodzi wzór:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Rzeczywiście  $U \cap W$  jest podprzetrzeniem przestrzeni  $U$  i  $W$ , a więc  $U \cap W$  jest skończenie wymiarowa. Przestrzeń  $U \cap W$  posiada, więc skończoną bazę  $v_1, \dots, v_k$ . Zgodnie z twierdzeniem Steinitza bazę tę można uzupełnić do baz przestrzeni  $U$  i przestrzeni  $W$ . Istnieją, więc wektory  $u_1, \dots, u_n$  i  $w_1, \dots, w_m$ , że:

$v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n$  jest bazą przestrzeni  $U$ ,

$v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m$  jest bazą przestrzeni  $W$ .

Do dowodu powyższej równości wystarczy sprawdzić, że układ

$v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$  jest bazą przestrzeni  $U + W$ .

Jeśli  $x \in U + W$  to  $x = u + w$ , gdzie  $u \in U$ ,  $w \in W$ , wtedy  $u$  jest liniową kombinacją wektorów  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n$ , a  $w$  liniową kombinacją wektorów  $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m$ , a zatem wektor  $x$  jest liniową kombinacją wektorów  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ . Sprawdźmy teraz liniową niezależność. Rozważmy równanie:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = \mathbf{0}$$

ponieważ  $w_i \notin U$  to  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$  i nasza równość przybiera postać:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = \mathbf{0}$$

ale wektory  $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n$  są liniowo niezależne, więc  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$  i udowodniliśmy liniową niezależność.

**Przykład** Wyznamy bazy i wymiary przestrzeni  $U, V, U \cap V, U + V$ , gdzie:

$$U = \text{Lin}\{(1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 3, 2, 0), (2, 6, 4, 0)\}$$

$$V = \text{Lin}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 3, 2, 2)\}$$

Przestrzeń  $U$  składa się z wszystkich wektorów, które można zapisać w postaci  $\alpha(1, 2, 1, 1) + \beta(0, 1, 1, -1) + \gamma(1, 2, 2, 0) + \delta(2, 5, 4, 0)$ , dla  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Jeśli jeden z wektorów jest liniowo zależny od pozostałych to można go z zestawu wektorów generujących  $U$  wykreślić. Zatem znalezienie bazy tej przestrzeni jest równoważne ze znalezieniem maksymalnego zbioru liniowo niezależnego w zbiorze wektorów  $\{(1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 2, 2, 0), (2, 5, 4, 0)\}$ . Zestawmy nasze wektory w macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

wtedy operacje elementarne na wierszach tej macierzy odpowiadają operacjom na wektorach.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4-2w_1]{w_3-w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-w_2]{w_4-2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zatem bazą przestrzeni  $U$  są wektory  $(1, 2, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, -1)$ , a jej wymiar jest równy 2 (zauważmy, że wymiar tej przestrzeni jest równy rzędowi macierzy). Obliczmy teraz wymiar przestrzeni  $V$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-2w_2]{w_3-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i ponieważ rząd tej macierzy jest równy 3 to wektory  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$  są liniowo niezależne. Zatem wymiar przestrzeni  $V$  jest równy 3. Zajmiemy się teraz przestrzenią  $U + V$ . Nietrudno zauważyć, że:

$$U + V = \text{Lin}\{(1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rząd tej macierzy jest równy 4, więc  $\dim(U + V) = 4$ . Ze wzoru

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

otrzymujemy:  $\dim(U \cap W) = 1$ .

**Zadanie** Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni  $\mathbb{R}$  (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ).

**Rozwiązanie** Ponieważ  $\dim \mathbb{R} = 1$  to każda podprzestrzeń ma wymiar 0 lub 1. Jeśli wymiar podprzestrzeni jest równy 0 to podprzestrzeń jest zerowa, jeśli wymiar jest równy 1 to podprzestrzeń pokrywa się z  $\mathbb{R}$ , a więc  $\mathbb{R}$  ma tylko dwie podprzestrzenie.

Niech  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  będzie bazą przestrzeni liniowej  $V$ . Wtedy każdy wektor  $v \in V$  da się jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów  $b_1, \dots, b_n$ , zatem istnieją skalary  $k_1, \dots, k_n$ , że  $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$ . Skalary  $k_1, \dots, k_n$  nazywamy współrzędnymi wektora  $v$  względem bazy  $B$  i piszemy  $v = (k_1, \dots, k_n)_B$ .

## Przekształcenia liniowe

Niech  $V$  i  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem  $K$ .  
Przekształcenie:

$$f : V \rightarrow W$$

nazywać będziemy **przekształceniem liniowym** przestrzeni  $V$  w przestrzeń  $W$  jeśli:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2),$$

oraz

$$\forall v \in V \forall k \in K \quad f(kv) = kf(v)$$

Prostą konsekwencją tej definicji jest fakt, że  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Rzeczywiście  $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$  stąd wynika, że  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

**Przykład** Dla dowolnych przestrzeni liniowych  $U, V$  nad tym samym ciałem przekształcenie  $\Theta(v) = \mathbf{0}$  jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie to nazywamy **przekształceniem zerowym**.

**Zadanie** Udowodnić, że funkcja:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x, y, z) = (x + y, x - y)$$

jest przekształceniem liniowym.

**Przykład** Funkcja  $\Phi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ , dana wzorem  $\Phi(g) = g'$  jest przekształceniem liniowym.

Przekształcenie liniowe nazywane jest również **homomorfizmem** przestrzeni liniowych. Przekształcenie liniowe, które przekształca przestrzeń  $V$  w siebie nazywać będziemy **operatorem liniowym**. Jeśli przekształcenie liniowe przestrzeni liniowych jest również bijekcją to nazywać je będziemy **izomorfizmem** przestrzeni liniowych.

**Zadanie** Udowodnić, że funkcja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , zadana wzorem  $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$  jest izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  na siebie.

Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ , wtedy przekształcenie liniowe, które przekształca  $V$  w  $K$  (jako jednowymiarową przestrzeń) nazywamy **funkcjonałem liniowym**

**Przykład** Funkcja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x, y, z) = x + y + z$  jest przykładem funkcyjonału liniowego.

Jeśli  $V$  i  $W$  są przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem  $K$  to przez  $\text{Hom}(V, W)$  oznaczamy zbiór wszystkich przekształceń liniowych  $V$  w  $W$ .

**Zadanie** Wyznaczyć  $\text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Rozwiązanie** Weźmy  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  i przyjmijmy  $a := f(1)$ . Wtedy mamy  $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xa$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Zatem każdy operator liniowy w przestrzeni  $\mathbb{R}$  jest funkcją  $f(x) = ax$ .

W zbiorze  $\text{Hom}(V, W)$  można wprowadzić działania dodawania homomorfizmów i mnożenia homomorfizmu przez skalar. Sumą funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$  jest funkcja  $f(x) + g(x)$ , a iloczynem liczby  $k$  przez funkcję  $f(x)$  jest funkcja  $kf(x)$ . Zbiór  $\text{Hom}(V, W)$  z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ .

**Zadanie** Udowodnić, że przestrzeń  $\text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  jest izomorficzna z przestrzenią  $\mathbb{R}$ .

**Rozwiązanie** Jak stwierdziliśmy wcześniej zbiór  $\text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  składa się z funkcji  $f(x) = ax$ . Niech  $f(x) = ax$ ,  $g(x) = bx$ , wtedy  $f(x) + g(x) = (a + b)x$ ,  $kf(x) = kax$ . Zatem przekształcenie, które każdej funkcji  $f(x) = ax$  przyporządkowuje liczbę  $a$  jest poszukiwanym przez nas izomorfizmem.

**Twierdzenie 1** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$  i niech  $\dim V = n < \infty$ . Wtedy przestrzeń  $V$  jest izomorficzna z przestrzenią  $K^n$ .

**Dowód** Ponieważ wymiar przestrzeni  $V$  jest równy  $n$  to w  $V$  istnieje baza składająca się z  $n$  wektorów. Niech  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  będzie jakąkolwiek bazą przestrzeni  $V$ . Wtedy każdemu wektorowi można przyporządkować jego współrzędne  $(k_1, \dots, k_n)_B$  względem bazy  $B$ . Zatem naszym odwzorowaniem jest funkcja:

$$(k_1, \dots, k_n)_B \rightarrow (k_1, \dots, k_n)$$

**Twierdzenie 2** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$  i niech  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$ . Wtedy dla dowolnej przestrzeni  $W$  nad ciałem  $K$  i dla dowolnego układu wektorów  $w_1, \dots, w_n \in W$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe  $f : V \rightarrow W$ , że  $f(b_1) = w_1, \dots, f(b_n) = w_n$ .

**Dowód** Niech  $v \in V$  wtedy istnieją skalary  $k_1, \dots, k_n$ , że  $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$ . Wtedy nasze przekształcenie  $f$  dane jest w następujący sposób:

$$f(k_1v_1 + \dots + k_nv_n) = k_1w_1 + \dots + k_nw_n$$

## Jądro i obraz przekształcenia liniowego

Niech  $f$  będzie przekształceniem liniowym przestrzeni  $V$  w przestrzeń  $W$ . Wtedy zbiór tych wektorów  $v$ , dla których  $f(v) = \mathbf{0}$  nazywamy **jądrem przekształcenia**  $f$  i oznaczamy go przez  $\text{Ker}(f)$ . Mamy zatem:

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V : f(v) = \mathbf{0}\}$$

Obrazem przekształcenia  $f$  nazywamy zbiór takich elementów  $w \in W$ , dla których istnieje  $v \in V$ , że  $f(v) = w$  i oznaczamy go przez  $\text{Im}(f)$ .

**Twierdzenie 3** *Niech  $f : V \rightarrow W$  będzie przekształceniem liniowym. Wtedy  $\text{Ker}(f)$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V$ , a  $\text{Im}(f)$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $W$ .*

**Dowód** Jeśli  $u, v \in \text{Ker}(f)$  to  $f(u) = f(v) = \mathbf{0}$  i mamy:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

zatem  $u + v \in \text{Ker}(f)$ . Drugi z warunków podprzestrzeni sprawdza się podobnie.

Weźmy teraz  $w_1, w_2 \in \text{Im}(f)$ , wtedy istnieją  $v_1, v_2 \in V$ , że  $f(v_1) = w_1$ ,  $f(v_2) = w_2$  i mamy  $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \text{Im}(f)$ .