

### Wykład 3

**Twierdzenie 1 (Steinitz)** *Jeśli układ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  jest bazą przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$  i układ wektorów  $u_1, u_2, \dots, u_m$  jest układem wektorów liniowo niezależnych w  $V$  to:*

- (i)  $m \leq n$ ,
- (ii) jeśli  $m = n$  to  $u_1, u_2, \dots, u_m$  jest bazą przestrzeni  $V$ ,
- (iii) jeśli  $m < n$  to istnieje dokładnie  $n - m$  wektorów, które wraz z wektorami  $u_1, u_2, \dots, u_m$  tworzą bazę przestrzeni  $V$ .

**Wniosek 1** *Każdy układ wektorów liniowo niezależnych można uzupełnić do bazy przestrzeni liniowej.*

**Wniosek 2** *Jeśli przestrzeń  $V$  posiada bazę złożoną z  $n$  wektorów to każdy układ liniowo niezależnych wektorów przestrzeni  $V$ , składający się z  $n$  wektorów jest bazą przestrzeni  $V$ .*

**Twierdzenie 2** *Każda niezerowa przestrzeń liniowa posiada bazę.*

**Twierdzenie 3** *Jeśli przestrzeń liniowa  $V$  nad ciałem  $K$  posiada bazę, która ma dokładnie  $n$  wektorów to każda inna baza też składa się z  $n$  wektorów.*

### Wymiar przestrzeni liniowej

**Wymiarem** przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$  nazywamy ilość elementów dowolnej bazy tej przestrzeni. Wymiar przestrzeni  $V$  oznaczamy będziemy przez  $\dim V$ . Jeśli wymiar jest skończony to będziemy mówić o przestrzeni skończonego wymiarowej. Przyjmujemy, że wymiar przestrzeni zerowej jest równy 0.

#### Przykłady

1.  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ,
2. ogólnie  $\dim K^n = n$ ,
3.  $\dim \mathbb{R}[x] = +\infty$

Nieformalnie mówiąc wymiarem przestrzeni liniowej jest ilość parametrów potrzebna do opisu dowolnego wektora danej przestrzeni. Na przykład mówimy, że nasza przestrzeń jest trójwymiarowa, bo żeby opisać dowolny punkt musimy podać trzy parametry (długość, wysokość, szerokość).

Innym przykładem niech będzie przestrzeń  $M_{n,m}(K)$  macierzy o  $n \times m$  współczynnikach z ciała  $K$ . Jest to przestrzeń, w której dodawaniem jest zwykłe dodawanie macierzy, a mnożeniem skalarów z ciała  $K$  przez wektory zwykłe mnożenie stałej przez macierz. Nietrudno jest zauważyć, że aby zdefiniować macierz trzeba określić  $m \cdot n$  wartości, a to oznacza, że  $\dim M_{n,m}(K) = m \cdot n$ .

**Twierdzenie 4** *Jeśli  $U, W$  są podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni  $V$  to:*

- (i) *jeśli  $U \subset W$  to  $\dim U \leq \dim W$ ,*
- (ii)  *$U \subset W$  i  $\dim U = \dim W$  wtedy i tylko wtedy gdy  $U = W$ .*

**Wniosek 3** *Podprzestrzeń przestrzeni skończenie wymiarowej jest przestrzenią skończenie wymiarową.*