

Wykład 2

Niech V będzie przestrzenią liniową i niech U, W będą podprzestrzeniami V wtedy będziemy mówić, że V jest **sumą prostą** przestrzeni U i W jeśli:

1. $V = U + W$,
2. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$,

i będziemy używać zapisu: $V = U \oplus W$.

Przykład Przestrzeń \mathbb{R}^2 jest sumą prostą podprzestrzeni $U = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ i $W = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$.

Niech v_1, v_2, \dots, v_n będą wektorami w przestrzeni V i niech $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ będą skalarami wtedy wektor:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

nazywamy **liniową kombinacją** wektorów v_1, v_2, \dots, v_n o współczynnikach k_1, k_2, \dots, k_n .

Niech $A \subseteq V$ będzie niepustym podzbiorem w V . Wtedy przez $Lin(A)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich możliwych skończonych kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A , czyli:

$$Lin(A) = \{k_1a_1 + \dots + k_na_n; a_i \in A, k_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

$Lin(A)$ nazywać będziemy domknięciem liniowym zbioru A .

Twierdzenie 1 *Zbiór $Lin(A)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V . Jest to najmniejsza podprzestrzeń przestrzeni V zawierająca zbiór A .*

Własności funkcji $Lin()$:

1. $Lin(Lin(A)) = Lin(A)$,
2. $Lin(A \cap B) \subseteq Lin(A) \cap Lin(B)$.

Jeśli dla pewnego $A \subset V$ mamy $Lin(A) = V$ to będziemy mówić, że zbiór A generuje V lub, że A jest zbiorem generatorów przestrzeni V .

Mówimy, że układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ jest **liniowo niezależny** jeśli:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Jeśli układ wektorów nie jest liniowo niezależny to mówimy, że jest to układ **liniowo zależny**.

Przykłady

1. Wektory $(1, 2, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)$ są liniowo niezależne w przestrzeni \mathbb{R}^4 .
2. Wektory $(1, 1, 1, 1), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)$ są liniowo zależne bo:

$$(1, 1, 1, 1) + (2, 3, 4, 5) - (3, 4, 5, 6) = (0, 0, 0, 0).$$

3. Wektory $1, x, \dots, x^n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$.
4. Funkcje $\sin x, \cos x$ są liniowo niezależne w przestrzeni \mathcal{C} .
5. Jeśli wśród wektorów v_1, v_2, \dots, v_n jest wektor zerowy to układ ten jest liniowo zależny. Jeśli w układzie tym dwa wektory się powtarzają to też są liniowo zależne.
6. Można też mówić o liniowej niezależności jednego wektora v , a mianowicie: wektor v jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $v \neq \mathbf{0}$.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład:

Sprawdźmy, czy wektory $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 3, 4, 1), (1, 2, 3, 4)$ są liniowo niezależne w przestrzeni \mathbb{R}^4 . Musimy sprawdzić dla jakich x, y, z, t liniowa kombinacja: $x(1, 1, 1, 1) + y(2, 1, 2, 1) + z(2, 3, 4, 1) + t(1, 2, 3, 4)$ jest równa zero, czyli badamy rozwiązania równania:

$$x(1, 1, 1, 1) + y(2, 1, 2, 1) + z(2, 3, 4, 1) + t(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

Zadanie to sprowadza się do badania rozwiązalności układu równań:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + 3z + 2t = 0 \\ x + 2y + 4z + 3t = 0 \\ x + y + z + 4t = 0 \end{cases}$$

układ ten można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że kolumnami macierzy współczynników są po prostu wyjściowe wektory. Wiemy z teorii równań jednorodnych, że nasz układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

A to oznacza, że wektory $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 3, 4, 1), (1, 2, 3, 4)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

Ogólnie rozpatrzmy m wektorów v_1, v_2, \dots, v_m w przestrzeni K^n . Niech A będzie macierzą, której kolumnami są współrzędne wektorów v_1, v_2, \dots, v_m . Wtedy mamy:

1. Jeśli $n = m$ to wektory v_1, v_2, \dots, v_n są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$.
2. Wektory v_1, v_2, \dots, v_m są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $r(A) = m$.

Pojęcie liniowej niezależności można uogólnić na nieskończone zbiory wektorów. Niech $A \subset V$ będzie podzbiorem w przestrzeni V . Będziemy mówić, że zbiór ten jest liniowo niezależny jeśli każdy skończony układ a_1, a_2, \dots, a_n różnych wektorów ze zbioru A jest liniowo niezależny.

Przykład Zbiór $A = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Baza przestrzeni liniowej

Zbiór $B \subseteq V$ nazywamy **bazą** przestrzeni liniowej V jeśli

1. $V = \text{Lin}(B)$.
2. Zbiór B jest liniowo niezależny.

Twierdzenie 2 *Jeśli B jest bazą przestrzeni liniowej V to każdy wektor ma jednoznaczne przedstawienie w postaci liniowej kombinacji elementów zbioru B .*

Będziemy mówić, że zbiór B jest **maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym** w przestrzeni V , jeśli B jest liniowo niezależny i każdy zbiór zawierający B jest liniowo zależny.

Będziemy mówić, że zbiór B jest **minimalnym zbiorem generatorów** przestrzeni V , jeśli $V = \text{Lin}(B)$ i dla każdego podzbioru $B_1 \subsetneq B$ mamy $V \neq \text{Lin}(B_1)$.

Te dwa pojęcia dają równoważne definicje bazy przestrzeni liniowej.

Twierdzenie 3 *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *zbiór B jest bazą przestrzeni V ,*
- (ii) *zbiór B jest minimalnym zbiorem generatorów przestrzeni V ,*
- (iii) *zbiór B jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym przestrzeni V .*

Dowód

(i) \Rightarrow (ii) Niech $b \in B$. Ponieważ B jest zbiorem liniowo niezależnym to wektora b nie da się wyrazić przy pomocy innych wektorów ze zbioru B . Zatem jeśli B_1 jest właściwym podzbiorem zbioru B to B_1 nie może generować przestrzeni V bo wektory należące do $B \setminus B_1$ nie należą do $\text{Lin}(B_1)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Zbiór B musi być liniowo niezależny (gdyby był liniowo zależny to można by go było zmniejszyć otrzymując mniejszy zbiór generatorów). Ponieważ B jest zbiorem generatorów to każdy wektor z V da się wyrazić jako liniową kombinację wektorów z B , a więc zwiększenie zbioru B spowoduje "utrata" liniowej niezależności.

(iii) \Rightarrow (i) Zbiór B jest liniowo niezależny i jeśli $v \in V \setminus B$ to zbiór $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny (wynika to z maksymalności B), a więc v można wyrazić jako liniową kombinację elementów zbioru B . To oznacza, że B jest również zbiorem generatorów, a więc jest bazą.

Przykłady

1. Układ $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^4 .
2. Układ wektorów $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ jest bazą przestrzeni K^n . Bazę tą będziemy nazywać bazą kanoniczną (albo standardową) przestrzeni K^n .
3. Układ $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$ również jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^4 .
4. Przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ ma bazę: $1, x, x^2, x^3, \dots$
5. Układ $A = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ale nie jest bazą bo na przykład wektora $(1, 1, 1, \dots)$ nie da się zapisać w postaci liniowej kombinacji wektorów ze zbioru A (gdyż w $\text{Lin}(A)$ znajdują się tylko skończone liniowe kombinacje!!!).
6. Przestrzeń \mathbb{C} nad ciałem \mathbb{C} posiada bazę, która składa się z wektora 1 .
7. Przestrzeń \mathbb{C} nad ciałem \mathbb{R} posiada bazę, która składa się z wektorów $1, i$.