Wykład 1

Przestrzenie liniowe

W geometrii analitycznej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ operowaliśmy wektorami. W zbiorze tych wektorów wprowadziliśmy dwa działania:

$$(x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)=(x+x_1,y+y_1,z+z_1),$$
$$k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$$

gdzie k jest dowolnym elementem ciała liczb rzeczywistych. Zauważyliśmy również, że działania te mają następujące własności:
1. $(\mathbb{R}^3,+)$ jest grupą abelową,
2. $\forall u,v\in\mathbb{R}^3, \forall k\in\mathbb{R}\ \ k(u+v)=ku+kv$,
3. $\forall u\in\mathbb{R}^3, \forall k,l\in\mathbb{R}\ \ (k+l)u=ku+lv$,
4. $\forall u\in\mathbb{R}^3, \forall k,l\in\mathbb{R}\ \ k(lu)=(kl)u$,
5. $\forall u\in\mathbb{R}^3\ \ 1u=u$.

Możemy teraz uogólnić powyższą konstrukcję. Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n);\ x_i\in\mathbb{R}\}$ dwa działania:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$
$$k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(kx_1,kx_2,\ldots,kx_n)$$

gdzie k jest dowolnym elementem ciała $\mathbb{R}$. Można sprawdzić, że podobnie jak poprzednio spełnione są własności:
1. $(\mathbb{R}^n,+)$ jest grupą abelową,
2. $\forall u,v\in\mathbb{R}^n, \forall k\in\mathbb{R}\ \ k(u+v)=ku+kv$,
3. $\forall u\in\mathbb{R}^n, \forall k,l\in\mathbb{R}\ \ (k+l)u=ku+lv$,
4. $\forall u\in\mathbb{R}^n, \forall k,l\in\mathbb{R}\ \ k(lu)=(kl)u$,
5. $\forall u\in\mathbb{R}^n\ \ 1u=u$.

Zauważmy, że działanie liczby rzeczywistej k na ciąg $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nie jest działaniem w sensie podanym na wykładzie w pierwszym semestrze, bo nie działa się tu wewnątrz pewnego zbioru, a działa się liczbami rzeczywistymi na elementy ze zbioru $\mathbb{R}^n$. Takie działanie będziemy nazywać **działaniem zewnętrznym**. Dokładniej działaniem zewnętrznym zbioru K na zbiór V nazywamy przyporządkowanie każdej parze $(k,v)\in K\times V$ elementu zbioru V, czyli działaniem zewnętrznym jest następująca funcja:

$$\varphi: K\times V\to V$$

zamiast pisać $\varphi(k,v)$ będziemy zwykle używać zapisu kv pamiętając, że k jest elementem zbioru K, v jest elementem zbioru V, a wynik kv jest znów elementem zbioru V.

Sytuację z powyższego przykładu można uogólnić. Niech V będzie zbiorem, w którym jest wprowadzone działanie binarne $+$ i niech K będzie ciałem. Wtedy V nazywać będziemy **przestrzenią liniową** (lub **wektorową**) nad ciałem K gdy w zbiorze V wprowadzone jest działanie zewnętrzne $(k, v) \to kv$ i spełnione są warunki:
1. $(V, +)$ jest grupą abelową,
2. $\forall u, v \in V, \forall k \in K \;\; k(u + v) = ku + kv,$
3. $\forall u \in V, \forall k, l \in K \;\; (k + l)u = ku + lv,$
4. $\forall u \in V, \forall k, l \in K \;\; k(lu) = (kl)u,$
5. $\forall u \in V \;\; 1u = u,$
elementy zbioru V nazywać będziemy wektorami, a elementy ciała K skalarami. Działanie zewnętrzne nazywać będziemy mnożeniem skalarów przez wektory. Ponadto przyjmujemy konwencję, że w mnożeniu tym skalary zapisujemy z lewej strony, a wektory z prawej, np. napis αa oznacza, że α jest skalarem, a a jest wektorem. Element neutralny dodawania oznaczać będziemy przez $\mathbf{0}$ i nazywać będziemy go wektorem zerowym.
Poznaliśmy już na początku wykładu przykłady przestrzeni liniowych, są to przestrzenie $\mathbb{R}^n$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Ogólniej jeśli K jest dowolnym ciałem to K^n jest przestrzenią liniową nad ciałem K, gdzie działania określone są następująco:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

A oto inne przykłady:
1. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (działanie zewnętrzne jest zwykłym działaniem mnożenia liczby wymiernej przez rzeczywistą).
2. Niech $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych. Elementy tego zbioru zapisywać będziemy w postaci: $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ lub $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. W zbiorze tym wprowadzamy działania:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots),$$
$$k(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (kx_1, kx_2, kx_3, \ldots)$$

Wtedy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.
3. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $K[x]$ oznacza zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała K. Wtedy $K[x]$ jest jest przestrzenią liniową nad ciałem K, gdzie działaniami są zwykłe działania dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

4. Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór funkcji ciągłych o dziedzinie w zbiorze $\mathbb{R}$ wtedy $\mathcal{C}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie działaniami są dodawanie funkcji i mnożenie funkcji przez skalar (np. sumą funkcji sin i cos jest funkcja $f(x) = \sin x + \cos x$).
Ponieważ $(V, +)$ jest grupą abelową to każdy element posiada element przeciwny, element przeciwny do v oznaczać będziemy przez $-v$ i możemy wprowadzić w zbiorze V działanie binarnego odejmowania:

$$u - v := u + (-v)$$

Twierdzenie 1 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wtedy:*
(i) $kv = \mathbf{0} \iff k = 0 \vee v = \mathbf{0}$,
(ii) $(-1)v = -v$.

Dowód
(i)
($\Rightarrow$) Jeśli $k = 0$ to mamy $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ i dodając stronami wektor $-0v$ otrzymujemy $0v = \mathbf{0}$. Podobnie można pokazać, że $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
($\Leftarrow$) Jeśli $kv = \mathbf{0}$ i $k \neq 0$ to istnieje element k^{-1} zatem możemy naszą równość wymnożyć stronami przez k^{-1} i otrzymujemy:

$$k^{-1}(kv) = k^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow (k^{-1}k)v = \mathbf{0} \Rightarrow 1v = \mathbf{0} \Rightarrow v = \mathbf{0}$$

(ii) Ponieważ $(V, +)$ jest grupą to każdy element posiada dokładnie jeden element odwrotny, więc wystarczy sprawdzić, że $(-1)v$ jest elementem odwrotnym do v. Rzeczywiście:

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0.$$

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niepusty podzbiór $W \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni V jeśli spełnione są następujące warunki:
1. Jeśli $u, v \in W$ to $u + v \in W$,
2. Jeśli $k \in K$ i $u \in W$ to $ku \in W$
Jeśli spełnione są warunki 1. i 2. to będziemy mówić, że zbiór W jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez skalary.

Uwaga 1 *Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K to jest również przestrzenią liniową nad K.*

Przykłady podprzestrzeni:
1. Zbiór złożony z wektorów $(x_1, 0, \ldots, 0)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

2. Zbiór ciągów zbieżnych jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ciągów o wyrazach rzeczywistych. Rzeczywiście jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami zbieżnymi to istnieją liczby x i y, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ i wtedy:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$$

zatem ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest również zbieżny. Drugi warunek sprawdza się analogicznie.
3. Zbiór ciągów zbieżnych do zera jest podprzestrzenią przestrzeni z punktu poprzedniego (a także podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).
4. Zbiór $K[x]_n = \{f(x) \in K[x];\ \mathrm{st} f \leqslant n\}$ wielomianów o współczynnikach z ciała K, których stopień nie przekracza ustalonej liczby n jest podprzestrzenią przestrzeni $K[x]$.
5. Zbiór funkcji różniczkowalnych jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{C}$.
6. Jeśli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K i $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym to $\{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Podprzestrzeń tą nazywamy podprzestrzenią zerową.
Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni V to będziemy pisać $W < V$.
Niech $U, W < V$ wtedy przez $U + W$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich wektorów $u + w$, gdzie $u \in U$, $w \in W$, więc:

$$U + W = \{u + w;\ u \in U, w \in W\}$$

Twierdzenie 2 *Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni V to $U \cap W$ i $U + W$ są podprzestrzeniami przestrzeni V.*

Dowód
1. Sprawdzimy najpierw, że $U \cap W$ jest podprzestrzenią. Wynika to z następującego ciągu implikacji:

$$x, y \in U \cap W \Rightarrow x, y \in U \wedge x, y \in W \Rightarrow x + y \in U \wedge x + yW \Rightarrow x + y \in U \cap W$$

oraz

$$x \in U \cap W \Rightarrow x \in U \wedge x \in W \Rightarrow kx \in U \wedge kxW \Rightarrow kx \in U \cap W$$

dla każdego $k \in K$.
2. Sprawdzimy, że $U + W$ jest podprzestrzenią. Rzeczywiście:

$$x, y \in U + W \Rightarrow x = u + w, y = u_1 + w_1 \Rightarrow x + y = u + w + u_1 + w_1 = \underbrace{u + u_1}_{\in U} + \underbrace{w + w_1}_{\in W} \in U + W$$

drugi warunek podprzestrzeni sprawdza się analogicznie.