Wykład 19

Geometria analityczna cd.
Równanie płaszczyzny
Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie punktem w przestrzeni i niech $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ będzie dowolnym wektorem. Wtedy płaszczyznę określamy jako zbiór wszystkich punktów $Q(x, y, z)$ takich, że wektor $\overrightarrow{P_0Q}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{n}$. Z tego określenia płaszczyzny możemy wyprowadzić równanie ogólne płaszczyzny. Ponieważ wektor $\overrightarrow{P_0Q} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ jest prostopadły do $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ to mamy:

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \circ [A, B, C] = 0$$

stąd mamy:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

jeśli przyjmiemy $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ to dostajemy równanie:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wektor o współrzędnych $[A, B, C]$ jest prostopadły do płaszczyzny. Wektor ten nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny.
Zadanie Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, 2, 0)$, $P_3(1, -2, 3)$.
Rozwiązanie Aby wyznaczyć równanie płaszczyzny trzeba wyznaczyć wektor normalny do płaszczyzny. Można zauważyć, że wektor ten jest prostopadły do wektorów $\overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{P_1P_3}$ zatem możemy przyjąć:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$$

Stąd łatwo już otrzymać równanie płaszczyzny.
Odległość punktu od płaszczyzny
Niech $Ax+By+Cz+D = 0$ będzie dowolną płaszczyzną i niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem. Wtedy odległość d tego punktu od płaszczyzny wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn
Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

badając wzajemne położenie wektorów normalnych.
Płaszczyzny te są równoległe wtedy i tylko wtedy gdy wektory normalne $[A_1, B_1, C_1]$ i $[A_2, B_2, C_2]$ czyli

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Płaszczyzny pokrywają się gdy:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

wynika to bezpośrednio z twierdzenia Kroneckera-Capellego.
Jeśli wektory normalne do płaszczyzn nie są równoległe to płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

takie przedstawienie prostej w przestrzeni nazywamy **równaniem krawędziowym prostej**.
Pęk płaszczyzn
Jeśli prosta l jest dana w postaci krawędziowej:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

to:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

dla różnych wartości parametrów α i β przedstawia zbiór płaszczyzn przechodzących przez prostą l, zbiór ten nazywamy **pękiem płaszczyzn** wyznaczonych przez prostą l.
Zadanie Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(3, 2, 1)$ i zawierającej prostą:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Równanie parametryczne prostej

Prostą będziemy tutaj przedstawiać w następujący sposób. Wybieramy wektor $a = [x_a, y_a, z_a]$ i punkt $P(x_0, y_0, z_0)$. Zbiór punktów $Q(x, y, z)$ takich, że wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest równoległy do a tworzy prostą w przystrzeni. Wektor $\overrightarrow{PQ}$ ma współrzędne $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a prosta ma wzór:

$$\frac{x - x_0}{x_a} = \frac{y - y_0}{y_a} = \frac{z - z_0}{z_a}$$

Równanie to nazywamy równaniem kierunkowym prostej, a wektor a nazywamy wektorem kierunkowym. Jeśli wprowadzimy dodatkowo parametr t, taki że:

$$\frac{x-x_0}{x_a}=\frac{y-y_0}{y_a}=\frac{z-z_0}{z_a}=t$$

i wyznaczymy x, y, z to otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} x=x_0+x_a t \\ y=y_0+y_a t \\ z=z_0+z_a t \end{cases}$$

Układ ten określa zbiór punktów leżących na prostej, dla różnych wartości parametru t otrzymujemy różne punkty leżące na prostej. Takie przedstawienie prostej nazywamy równaniem parametrycznym prostej. Warto zauważyć, że równanie parametryczne zawiera w swoim wzorze współrzędne punktu przez który ta prosta przechodzi oraz współrzędne wektora kierunkowego tej prostej.
Przykład Zapisać w postaci parametrycznej prostą:

$$\begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ 2x+y+3z-4=0 \end{cases}$$

Przykład Wyznaczyć odległość punktu $P(1,2,3)$ od prostej

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Przykład Sprawdzić, czy proste

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$$

są skośne i znaleźć odległość między nimi.

Powierzchnie stopnia drugiego

Podobnie jak na płaszczyźnie można sklasyfikować powierzchnie stopnia 2 w przestrzeni.

(1) Sfera o środku w punkcie $S(x_0, y_0, z_0)$ i o promieniu R ma równanie: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$,

(2) Elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,

(3) Hiperboloida jednopowłokowa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

(4) Hiperboloida dwupowłokowa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

(5) Paraboloida eliptyczna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$,

(6) Paraboloida hiperboliczna $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Walce:

Walcem lub powierzchnią walcową nazywamy powierzchnię, która jest utworzona przez układ prostych równoległych przecinających pewną krzywą np. równania: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$ przedstawiają walce w przestrzeni.

Stożki:

Stożkiem lub powierzchnią stożkową nazywamy powierzchnię, która jest utworzona przez układ prostych przechodzących przez ustalony punkt w przestrzeni i przecinających krzywą. Walcem jest na przykład powierzchnia o równaniu: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Powierzchnie prostokreślne

Powierzchnie utworzone przez układy linii nazywamy powierzchniami prostokreślnymi. Oczywiście walce i stożki są prostokreślne.
Hiperboloida jednopowłokowa i paraboloida hiperboliczna są powierzchniami prostokreślnymi. Rzeczywiście równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ można zapisać w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

możemy wprowadzić parametr t i otrzymujemy:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)t, \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\frac{1}{t}$$

co dla różnych wartości parametru t daje prostą całkowicie zawartą w powierzchni.

Powierzchnie obrotowe

Jeśli powierzchnia jest utworzona przez obrót pewnej krzywej dookoła pewnej osi to powierzchnię taką nazywamy powierzchnią obrotową. Na przykład jeśli elipsę: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ na płaszczyźnie xy obrócimy dookoła osi Oy to w efecie o trzymamy w przestrzeni elipsoidę obrotową o wzorze:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$