

## Wykład 17

### Geometria analityczna cd.

### Geometria analityczna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Podobnie jak w przypadku geometrii na płaszczyźnie będziemy mówić o układzie współrzędnych. Układ taki powstaje przez obranie punktu 0 i wybranie trzech osi wzajemnie prostopadłych  $0x, 0y, 0z$ . Istnieją dwie klasy układów współrzędnych różniące się skrętnością.

W przestrzeni trójwymiarowej, każdy punkt  $P$  może być przedstawiony za pomocą trzech współrzędnych  $(x, y, z)$ . Jeśli dane są dwa punkty  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  to ich odległość wyraża się następująco:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów  $(P_1, P_2)$  i oznaczamy go przez  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Punkt  $P_1$  nazywamy początkiem wektora, a punkt  $P_2$  końcem. Odległość  $P_1$  od  $P_2$  nazywamy długością wektora i oznaczamy przez  $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ . Podobnie jak na płaszczyźnie będziemy mówić o wektorach swobodnych. W tym przypadku utożsamiamy wektory, które mają ten sam kierunek, ten sam zwrot i tą samą długość, a więc w przypadku wektorów swobodnych punkt zaczepienia nie ma znaczenia, ważne są tylko jego długość, zwrot i kierunek. Jeśli wektor swobodny  $\overrightarrow{P_1P_2}$  jest określony przez punkty  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  to wektor ten ma współrzędne:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

Wektory możemy, więc utożsamiać z trójkami liczb rzeczywistych. Wektory swobodne można dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste (skalary). Dodawanie wektorów zdefiniowane jest dokładnie tak samo jak na płaszczyźnie, podobnie definiujemy mnożenie przez skalary. Działania te można również zdefiniować dla trójek liczb rzeczywistych:

$$[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$$

$$\alpha[x_1, y_1, z_1] = [\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1]$$

Struktura  $(\mathbb{R}, +)$  jest grupą abelową (podobnie jak struktura wektorów swobodnych wraz z dodawaniem). Mnożenie skalarów przez wektory ma następujące własności: dla każdego  $a, b \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ ,
- (ii)  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ ,
- (iii)  $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ ,

(iv)  $1a = a$ .

### Długość wektora

Jeśli wektor  $a$  ma współrzędne  $[x_a, y_a, z_a]$  to jego długość jest wyrażona wzorem:

$$|a| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

Własności długości wektorów są podobne jak własności długości wektorów na płaszczyźnie:

(i)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,

(ii)  $|\alpha a| = |\alpha||a|$ .

Wektor  $a$  nazywa się **wersorem** jeśli  $|a| = 1$ . Wersory, który są położone na osiach nazywamy wersorami osi i oznaczamy je  $i$  dla osi  $0x$ ,  $j$  dla osi  $0y$ ,  $k$  dla osi  $0z$ . Jak łatwo zauważyć wersory osi mają współrzędne:  $i = [1, 0, 0]$ ,  $j = [0, 1, 0]$ ,  $k = [0, 0, 1]$ . Jeśli  $a, b, c$  są trzema wektorami, a  $\alpha, \beta, \gamma$  skalarami to  $\alpha a + \beta b + \gamma c$  nazywamy **liniową kombinacją** wektorów  $a, b, c$ .

Każdy wektor da się jednoznacznie przedstawić jako liniową kombinację wersorów  $i, j, k$ . Jeśli wektor  $a$  ma współrzędne  $x_a, y_a, z_a$  to

$$a = x_a i + y_a j + z_a k.$$

Rzeczywiście  $a = [x_a, y_a, z_a] = x_a[1, 0, 0] + y_a[0, 1, 0] + z_a[0, 0, 1] = x_a i + y_a j + z_a k$ .

Wektory  $a, b, c$  nazywamy **komplanarnymi** wtedy i tylko wtedy gdy istnieje płaszczyzna do której te wektory są równoległe. Inaczej mówiąc wektory  $a, b, c$  są komplanarne wtedy i tylko wtedy gdy jeden z nich jest liniową kombinacją pozostałych wektorów, np.  $a = \beta b + \gamma c$ .

### Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym wektorów  $a = [x_1, y_1, z_1]$  i  $b = [x_2, y_2, z_2]$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$  i oznaczamy ją przez  $a \circ b$ .

### Własności iloczynu skalarnego

Niech  $a, b, c$  będą trzema wektorami, i niech  $\alpha$  będzie skalarem, wtedy iloczyn skalarny ma następujące własności:

(i)  $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ ,

(ii)  $(\alpha a) \circ b = \alpha(a \circ b) = a \circ (\alpha b)$ ,

(iii)  $a \circ b = b \circ a$ ,

(iv)  $a \circ a \geq 0$  i  $a \circ a = 0 \iff a = 0$ .

Ponadto można zauważyć, że  $|a| = \sqrt{a \circ a}$ .

Kątem między wektorami  $a$  i  $b$  nazywamy mniejszy z kątów, wyznaczonych przez przecinające się proste wyznaczone przez te wektory. Kąt między wektorami  $a$  i  $b$  wyznaczony jest wzorem:

$$\cos(\sphericalangle(a, b)) = \frac{a \circ b}{|a||b|}$$

Wektory  $a, b$  nazywamy **ortogonalnymi** wtedy i tylko wtedy gdy  $a \circ b = 0$  (inaczej mówiąc wektory są ortogonalne gdy kąt między nimi jest równy  $\frac{\pi}{2}$ ).

**Zadanie** Wyznaczyć kąt między wektorami  $a = [2, 0, -1]$  i  $b = [1, 3, 0]$ .

**Rozwiązanie** Obliczamy:  $a \circ b = 2$ ,  $|a| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,  $|b| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$  i otrzymujemy:

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{a \circ b}{|a||b|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$$

### Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym wektorów  $a = [x_a, y_a, z_a]$  i  $b = [x_b, y_b, z_b]$  nazywamy wektor, który ma następujące współrzędne:

$$[y_a z_b - y_b z_a, x_b z_a - x_a z_b, x_a y_b - x_b y_a]$$

i oznaczamy go przez  $a \times b$ .

Sposób obliczania iloczynu wektorowego. Iloczyn wektorowy wektorów  $a = [x_a, y_a, z_a]$  i  $b = [x_b, y_b, z_b]$  można wyrazić przez wyznacznik:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

gdzie  $i, j, k$  są wersorami osi. Wyznacznik ten formalnie nie ma sensu (pierwszy wiersz składa się z wektorów) ale pozwala łatwo zapamiętać sposób obliczania iloczynu wektorowego.

Można zauważyć, że:

- (i)  $|a \times b| = |a||b| \sin(\angle(a, b))$ ,
- (ii) wektor  $a \times b$  jest ortogonalny do wektora  $a$  i  $b$ ,
- (iii) zwrot wektora  $a \times b$  jest określony przez tzw. regułę śruby prawoskrętnej lub trzech palców lewej dłoni.
- (iv)  $a \times b = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $a$  i  $b$  są wektorami kolinearnymi,
- (v)  $a \times b = -b \times a$ ,
- (vi)  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ ,
- (vii)  $(\alpha a) \times b = \alpha(a \times b)$ .

Z punktu (iv) łatwo wynika, że wektory  $a = [x_a, y_a, z_a]$  i  $b = [x_b, y_b, z_b]$  są kolinearne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

**Zadanie** Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach w punktach  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(0, -1, -1)$ ,  $P_3(1, 0, 1)$ .

**Rozwiązanie** Jeśli wyznaczmy wektory  $\overrightarrow{P_1P_2}$  i  $\overrightarrow{P_1P_3}$  to pole trójkąta jest równe  $P_\Delta = \frac{1}{2}|P_1P_2||P_1P_3| \sin(\angle(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}))$ , zatem  $P_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$ . Obliczmy

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = [-2, -2, 2]$$

i

$$|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

więc

$$P_\Delta = \frac{1}{2}2\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

### Iloczyn mieszany

Niech  $a = [x_a, y_a, z_a]$ ,  $b = [x_b, y_b, z_b]$ ,  $c = [x_c, y_c, z_c]$  będą trzema wektorami, wtedy liczbę  $(a \times b) \circ c$  nazywamy iloczynem mieszanym wektorów  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Iloczyn mieszany można wyznaczyć w następujący sposób:

$$(a \times b) \circ c = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Moduł iloczynu mieszanego wektorów  $a$ ,  $b$  i  $c$  wyraża objętość równoległościanu zbudowanego na tych wektorach.

Powyższe stwierdzenie oznacza również, że wektory  $a$ ,  $b$  i  $c$  są komplanarne wtedy i tylko wtedy gdy równoległościan zbudowany na tych wektorach ma objętość równą zero. Zatem wektory  $a$ ,  $b$  i  $c$  są komplanarne wtedy i tylko wtedy gdy  $(a \times b) \circ c = 0$ .