Wykład 16

Geometria analityczna cd.

Podział linii stopnia drugiego

Każdą linię przedstawioną równaniem:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1}$$

gdzie $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ nazywamy linią stopnia drugiego.
Każde równanie stopnia drugiego przedstawia: elipsę, hiperbolę, parabolę, dwie proste lub zbiór pusty.
Oznaczmy:

$$W = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

i

$$w = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 1 *Gdy $W \neq 0$ to równanie* (1) *przedstawia:*
(i) *elipsę gdy $w > 0$ i $aW < 0$, zbiór pusty (elipsę urojoną) gdy $w > 0$ i $aW > 0$,*
(ii) *hiperbolę gdy $w < 0$,*
(iii) *parabolę gdy $w = 0$*
Gdy $W = 0$ to równanie (1) *przedstawia:*
(iv) *dwie przecinające się proste gdy $w < 0$,*
(v) *punkt gdy $w > 0$,*
(vi) *dwie proste równoległe (lub równe) gdy $w = 0$.*

Dowód Dowód można znaleźć w książce F. Leja "Geometria analityczna" wyd. dziesiąte, PWN Warszawa 1966.
Przykład Zbadajmy, jaką linię przedstawia równanie $ax^2+y^2-4x+6y+7 = 0$, dla różnych wartości a. Nasze wyróżniki są równe:

$$W = \begin{vmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -2(a+2), \ w = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

(1) Niech $w \neq 0$ tzn $a \neq 0$ wtedy mamy:

$$a(x^2 - \frac{4}{a}x) + (y^2 + 6y) + 7 = a(x - \frac{2}{a})^2 + (y+3)^2 - \frac{4}{a} - 9 + 7 = 0$$

stąd:

$$a(x-\frac{2}{a})^2+(y+3)^2=\frac{4}{a}+2=\frac{2(2+a)}{a}$$

Krzywe stopnia drugiego nazywamy też **krzywymi stożkowymi** gdyż powstają one z przecięcia stożka trójwymiarowego różnymi płaszczyznami.