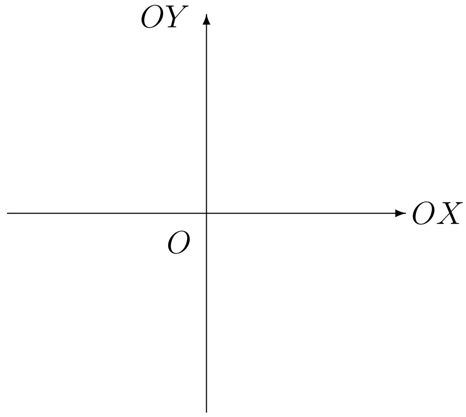
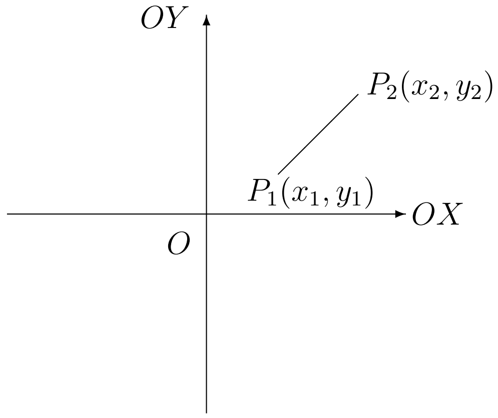
Wykład 16

Geometria analityczna
Przegląd wiadomości z geometrii analitycznej na płaszczyźnie

Ortokartezjański układ współrzędnych powstaje przez ustalenie punktu początkowego O zwanego początkiem układu współrzędnych i dwóch prostych skierowanych, wzajemnie prostopadłych, przecinających się w punkcie O:



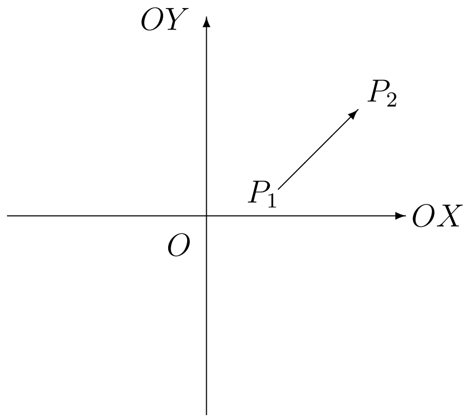
Układem współrzędnych nazywamy uporządkowaną parę (OX, OY), gdzie OX i OY są osiami współrzędnych.
Odległością dwóch punktów P_1 i P_2 nazywamy długość odcinka P_1P_2:



Odległość tych punktów wyraża się wzorem:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

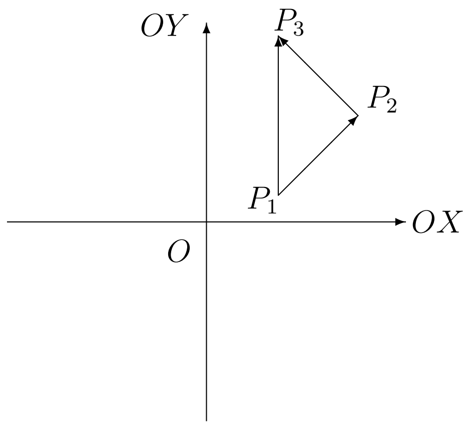
Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów (P_1, P_2) na płaszczyźnie i oznaczamy go przez $\overrightarrow{P_1P_2}$:



Punkt P_1 nazywamy początkiem wektora, a punkt P_2 końcem. Odległość $|P_1P_2|$ nazywamy długością wektora. Wektor $\overrightarrow{PP}$ nazywamy wektorem zerowym. Każdą prostą równoległą do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$ nazywamy kierunkiem tego wektora. Wektory nazywamy równoległymi (kolinearnymi) jeśli mają równoległe kierunki. Mówimy, że dwa wektory kolinearne $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ mają taki sam zwrot gdy odcinki P_1P_4, P_2P_3 mają punkt wspólny w przeciwnym razie mówimy, że wektory mają zwrot przeciwny.

Dla dowolnych punktów P_1, P_2, P_3 wektor $\overrightarrow{P_1P_3}$ nazywamy sumą wektorów $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ i piszemy:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3}$$



Wektory $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ nazywamy **równoważnymi**, gdy mają taką samą długość, są kolinearne i mają ten sam zwrot. Będziemy takie wektory uważać za równe i nazywać je będziemy wektorami **swobodnymi**. Wektory swobodne będziemy oznaczać małymi literami alfabetu i czasem będziemy używać strzałek. Każdy wektor swobodny na płaszczyźnie utożsamiać będziemy z parą liczb rzeczywistych $[x, y]$. Jeśli $P_1(x_1, x_2)$ jest początkiem wektora, a $P_2(x_2, y_2)$ jego końcem to $x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1$. Dowolne dwa wektory swobodne można dodawać i jeśli $a = [x_a, y_a], b = [x_b, y_b]$ to:

$$a + b = [x_a + x_b, y_a, y_b]$$

Dowolny wektor można mnożyć przez liczbę:

$$\alpha a = \alpha[x_a, y_a] = [\alpha x_a, \alpha y_a]$$

Zbiór wektorów swobodnych można utożsamiać ze zbiorem $\mathbb{R}^2$.

Stwierdzenie 1 *Struktura* $(\mathbb{R}^2, +)$ *jest grupą abelową.*

Równoważnie można mówić o grupie abelowej wektorów swobodnych z dodawaniem wektorów.

Własności mnożenia wektorów przez liczbę
Dla każdych wektorów $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy:
(i) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$,
(ii) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$,
(iii) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$,
(iv) $1a = a$.

Długością wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$ nazywamy długość odcinka P_1P_2 i oznaczamy przez $|P_1P_2|$. Jeśli $a = [x, y]$ to

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Własności długości wektora
(i) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
(ii) $|\alpha a| = |\alpha||a|$
Dowód Niech $a = [x_1, y_1]$, $b = [x_2, y_2]$. Oznaczmy przez z_1 liczbę zespoloną $x_1 + y_1 i$, a przez z_2 liczbę $x_2 + y_2 i$, wtedy długością wektora a jest moduł z liczby z_1, długością wektora b moduł z z_2, a długością $a + b$ moduł z $z_1 + z_2$ i punkt (i) wynika z odpowiedniej nierówności dla modułów. Punkt (ii) można udowodnić wprost z definicji.■
Wektor a nazywamy **wersorem** jeśli $|a| = 1$.
Iloczyn skalarny wektorów
Niech $a = [x_a, y_a], b = [x_b, y_b]$ wtedy iloczynem skalarnym wektorów a i b nazywamy liczbę $x_a x_b + y_a y_b$ i oznaczamy go przez $a \circ b$.
Własności iloczynu skalarnego
(i)

$$\cos[\sphericalangle(a, b)] = \frac{a \circ b}{|a||b|}$$

(ii) $a \circ b = b \circ a$,
(iii) $(\alpha a) \circ b = \alpha(a \circ b)$,
(iv) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$,

(v) $a \circ a \geqslant 0$ i $a \circ a = 0 \iff a = 0$.
Można zauważyć, że jeśli u jest dowolnym wektorem to $|u| = \sqrt{u \circ u}$.
Kątem między wektorami nazywamy mniejszy z dwóch kątów, które te wektory wyznaczają. Zatem jeśli φ jest kątem między wektorami a i b to $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Do obliczania kąta między wektorami wykorzystać można iloczyn skalarny i własność (i) iloczynu.
Dwa wektory a i b nazywamy **ortogonalnymi** wtedy i tylko wtedy gdy $a \circ b = 0$. Jak widać z własności (i) wektory są ortogonalne wtedy i tylko wtedy gdy kąt między nimi jest równy $\frac{\pi}{2}$ (czyli są prostopadłe).

Wektory $a = [x_a, y_a]$ i $b = [x_b, y_b]$ są kolinearne (równoległe) wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$. Rzeczywiście wektory $a = [x_a, y_a]$, $b = [x_b, y_b]$ są równoległe gdy kąt pomiędzy nimi jest równy 0 lub π, a więc na podstawie własności (i) iloczynu skalarnego mamy: $\frac{a \circ b}{|a||b|} = 1$ lub $\frac{a \circ b}{|a||b|} = -1$. Stąd

$$x_a x_b + y_a y_b = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

lub

$$x_a x_b + y_a y_b = -\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

i podnosząc te równości do kwadratu otrzymujemy:

$$x_a^2 x_b^2 + 2x_a x_b y_a y_b + y_a^2 y_b^2 = x_a^2 x_b^2 + x_a^2 y_b^2 + x_b^2 y_a^2 + y_a^2 y_b^2$$

a stąd:

$$2x_a x_b y_a y_b = x_a^2 y_b^2 + x_b^2 y_a^2$$

więc:

$$x_a^2 y_b^2 - 2x_a x_b y_a y_b + x_b^2 y_a^2 = 0$$

$$(x_a y_b - x_b y_a)^2 = 0$$

zatem:

$$x_a y_b = x_b y_a$$

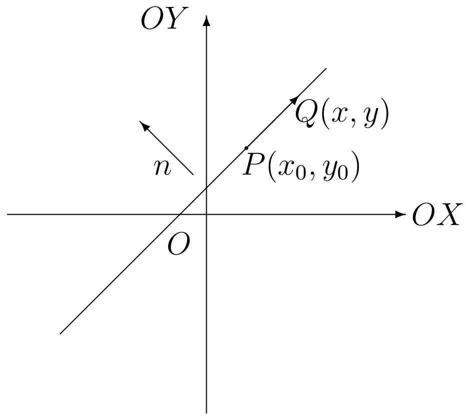
i

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$$

To oznacza, że dwa wektory a i b są kolinerarne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$, że $b = \alpha a$. Mówimy, że wektory kolinearne a i b mają ten sam zwrot gdy $\alpha > 0$, a gdy $\alpha < 0$ to mówimy, że wektory mają zwrot przeciwny (czasami będziemy mówić o wektorach zgodnie lub przeciwnie równoległych).

Równanie prostej

Niech $P(x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem i niech $n = [A, B]$ będzie dowolnym wektorem. Zbiorem wszystkich punktów $Q(x, y)$ takich, że wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest prostopadły do n jest prosta na płaszczyźnie:



Ponieważ wektory n i $\overrightarrow{PQ} = [x - x_0, y - y_0]$ są ortogonalne, więc mamy $n \circ \overrightarrow{PQ} = 0$, więc $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$. Stąd mamy: $Ax+By+Ax_0+By_0 = 0$, przyjmując $C = Ax_0 + By_0$ otrzymujemy równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0$$

Równanie to jest wyznaczone przez wektor prostopadły do prostej $n = [A, B]$ zwany wektorem **normalnym** tej prostej.

Wzajemne położenie dwóch prostych

Kąt między prostymi równy jest kątowi między wektorami normalnymi. Więc dwie proste są równoległe gdy ich wektory normalne są równoległe. Proste:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są

(1) równoległe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

(2) pokrywają się gdy:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

(3) są prostopadłe gdy:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Przykład Wyznaczymy prostą przechodzącą przez dwa punkty $(1, 2)$ i $(3, 4)$. Wystarczy wyznaczyć wektor normalny tej prostej, to znaczy wektor prostopadły do wektora $[2, 2]$. Takim wektorem może być na przykład $[-1, 1]$. Zatem równanie naszej prostej jest następujące:

$$-(x - 1) + (y - 2) = 0$$

a więc:

$$-x + y - 1 = 0$$

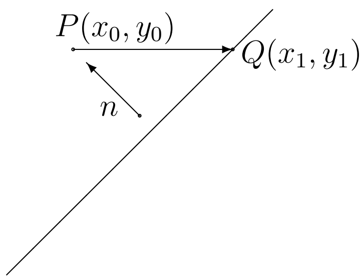
Zadanie Wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do $-x + 2y + 1 = 0$ przechodzącej przez punkt $P(1, 2)$.

Rozwiązanie Wektor normalny szukanej prostej jest prostopadły do wektora $[-1, 2]$, który jest wektorem normalnym prostej danej, więc może to być na przykład wektor $[2, 1]$. Zatem równanie prostej szukanej ma postać $2x + y + C = 0$ i ponieważ prosta ma przechodzić przez punkt $(1, 2)$ to mamy $2 \cdot 1 + 2 + C = 0$, stąd $C = -4$. Równanie szukanej prostej ma postać:

$$2x + y - 4 = 0$$

Odległość punktu od prostej

Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najmniejszego odcinka łączącego punkt P z prostą l. Nietrudno się domyślić, że tym najkrótszym odcinkiem będzie odcinek, który jest prostopadły do naszej prostej. Niech $P(x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem i niech $Ax + By + C = 0$ będzie równaniem prostej. Oznaczmy przez n wektor $[A, B]$ normalny do naszej prostej. Wybierzmy dowolny punkt $Q(x_1, y_1)$ leżący na naszej prostej, więc $Ax_1 + By_1 + C = 0$.



Jeśli oznaczymy przez d odległość punktu P od prostej to kosinus kąta α zawartego między odcinkiem prostopadłym do prostej przechodzącym przez

P, a odcinkiem PQ jest równy:

$$\cos\alpha = \frac{d}{|PQ|}$$

z drugiej strony mamy:

$$\cos\alpha = \left|\frac{n \circ \overrightarrow{PQ}}{|n||PQ|}\right|$$

moduł wynika z faktu, że kosinus kąta jest większy od zera, a kąt między wektorem $\overrightarrow{PQ}$, a n może być rozwarty. Porównując dwie ostatnie równości mamy:

$$\frac{d}{|PQ|} = \left|\frac{n \circ \overrightarrow{PQ}}{|n||PQ|}\right|$$

stąd:

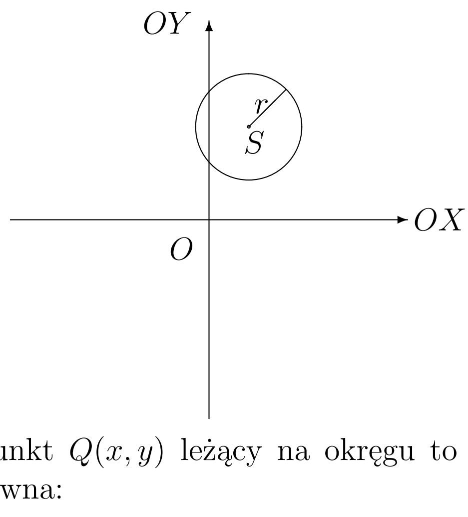
$$d = \left|\frac{n \circ \overrightarrow{PQ}}{|n|}\right| = \left|\frac{[A, B] \circ [x_1 - x_0, y_1 - y_0]}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

ostatnia równość jest spełniona bo $-C = Ax_1 + By_1$. Zatem otrzymaliśmy wzór na odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Równanie okręgu

Okręgiem o środku $S(x_0, y_0)$ i promieniu r nazywamy zbiór punktów, których odległość od S jest równa r:



Jeśli wybierzemy punkt $Q(x, y)$ leżący na okręgu to jego odległość od punktu $S(x_0, y_0)$ jest równa:

$$|QS| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Ta odległość jest równa r, więc otrzymujemy **równanie okręgu** o środku $S(x_0, y_0)$ i promieniu r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Równanie elipsy

Elipsą nazywamy zbiór wszystkich punktów, których suma odległości od dwóch wybranych punktów (zwanych ogniskami elipsy) jest stała.
Wyprowadzimy teraz wzór na elipsę, której ogniska położone są w dwóch punktach $F_1(c, 0)$ i $F_2(-c, 0)$, a stała suma odległości jest równa $2a$. Niech $Q(x, y)$ będzie dowolnym punktem położonym na naszej elipsie. Wtedy zgodnie z naszą definicją mamy $|F_1Q| + |F_2Q| = 2a$, a więc:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

przenosząc drugi z pierwiastków na drugą stronę otrzymujemy:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

podnosimy obie strony do kwadratu:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

stąd:

$$-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

i dzieląc przez -4:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

znowu podnosimy do kwadratu:

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

porządkując wyrazy otrzymujemy:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

dzielimy obustronnie przez $a^2(a^2 - c^2)$ dostajemy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

oczywiście, żeby zdania miało sens to $2a > 2c$, więc $a^2 - c^2 > 0$. Przyjmijmy więc $b^2 = a^2 - c^2$ i otrzymujemy **równanie elipsy**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Styczna do elipsy

Stwierdzenie 2 *Prosta $Ax + By + C = 0$ jest styczna do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.*

Dowód Prosta jest styczna do elipsy wtedy i tylko wtedy gdy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, a to zachodzi gdy $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.■

Jeśli punkt $P(x_0, y_0)$ leży na elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ to równanie prostej stycznej do tej elipsy w punkcie P wyraża się wzorem

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

i ponieważ jest spełniony warunek ze stwierdzenia to prosta jest styczna. Rzeczywiście prosta ta ma punkt wspólny z elipsą (jest nim punkt P).

Równanie hiperboli

Hiperbolą nazywamy zbiór wszystkich punktów, których moduł różnicy odległości od dwóch wybranych punktów (zwanych ogniskami hiperboli) jest stała.

Podobnie jak poprzednio możemy wyprowadzić wzór na hiperbolę o ogniskach w punktach $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ i o stałej różnicy równej $2a$. Znowu wybieramy punkt na hipeboli $Q(x, y)$ i z definicji mamy $|F_1Q| - |F_2Q| = 2a$. Wykonując podobne jak poprzednio przekształcenia dochodzimy do:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ale tym razem z nierówności trójkąta wynika, że $2c > 2a$, więc mamy $c^2 - a^2 > 0$. Jeśli przyjmiemy teraz $b^2 = c^2 - a^2$ to otrzymamy **równanie hiperboli**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aby narysować wykres hiperboli o powyższym równaniu zauważmy, że dla $y = 0$ otrzymujemy $x = \pm a$. Zauważmy również, że nasza krzywa posiada dwie asymptoty: $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$

Podobnie jak dla elipsy możemy rozważać warunki przy których prosta jest styczna do hiperboli.

Równanie paraboli

Parabolą nazywamy zbiór wszystkich punktów równoodległych od prostej i od stałego punktu. Prostą nazywamy kierownicą, a punkt ogniskiem paraboli.

Wyprowadzimy równanie paraboli w przypadku gdy kierownica dana jest wzorem $x = -\frac{1}{2}p$ dla $p > 0$, a ognisko jest położone w punkcie $F(\frac{1}{2}p, 0)$ (to nam gwarantuje, że parabola będzie miała wierzchołek w początku układu współrzędnych. Niech $P(x, y)$ będzie punktem leżącym na paraboli. Wtedy odległość tego punktu od kierownicy wynosi $x + \frac{1}{2}p$, a odległość od F wynosi $\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$. Z określenia paraboli mamy:

$$x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$$

podnosząc do kwadratu mamy:

$$x^2 + xp + \frac{1}{4}p^2 = x^2 - xp + \frac{1}{4}p^2 + y^2$$

stąd otrzymujemy **równanie paraboli**:

$$y^2 = 2px$$