Wykład 15

Układy równań liniowych

Niech K będzie ciałem i niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in K$. Równanie:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

z niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy **równaniem liniowym**.
Układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

nazywamy układem m równań liniowych z n niewiadomymi. Rozwiązaniem układu nazywamy każdy ciąg elementów $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$, które podstawione za zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają każde z równań. Układ (1) możemy zapisać w innej, macierzowej, postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

wtedy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą współczynników układu, jej elementy nazywamy współczynnikami, a macierz:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

kolumną wyrazów wolnych. Przyjmując:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$$

nasz układ zapiszemy, w postaci:

$$A \cdot X = B$$

Zajmiemy się najpierw przypadkiem, gdy układ ma tyle samo zmiennych co niewiadomych, to znaczy gdy macierz współczynników A jest kwadratowa.

Układ n równań z n niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

nazywamy **układem Cramera** [1] wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$, gdzie $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ jest macierzą współczynników tego układu.

Jeśli $A = [A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n]$ jest macierzą współczynników układu, a B jest kolumną wyrazów wolnych to przez $A_{(i)}$ oznaczać będziemy macierz $[A_1, \ldots, B, \ldots, A_n]$, czyli $A_{(i)}$ oznacza macierz, która powstała z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych.

Twierdzenie 1 *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dane wzorami:

$$x_1 = \frac{\det A_{(1)}}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_{(2)}}{\det A}, \ldots,\ x_n = \frac{\det A_{(n)}}{\det A}$$

Dowód Jeśli zapiszemy układ (2) w postaci macierzowej:

$$A \cdot X = B$$

to, ponieważ $\det A \neq 0$, to możemy równanie wymnożyć lewostronnie przez A^{-1}. Wtedy otrzymujemy:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

co oznacza, że rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Ponieważ:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T$$

i $A^D = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, to mamy:

$$x_i = \tfrac{1}{\det A}(c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \ldots + c_{in}b_n) =$$
$$\tfrac{1}{\det A}((-1)^{i+1} \det A_{i1}b_1 + (-1)^{i+2} \det A_{i2}b_2 + \ldots + (-1)^{i+n} \det A_{in}b_n) \overset{(!)}{=}$$
$$\tfrac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{\det A} \det A_{(i)}$$

[1] G. Cramer (1704-1752) -matematyk szwajcarski, zajmował się układami równań liniowych i teorią wyznaczników.

równość (!) jest prostą konsekwencją Twierdzenia Laplace'a (jest to rozwinięcie wyznacznika macierzy $A_{(i)}$ względem i-tej kolumny).■

Wzory występujące w powyższym równaniu noszą nazwę **wzorów Cramera**.

Przykład Rozwiążemy metodą Cramera układ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

jest to układ Cramera, ponieważ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 12$$

Układ jednorodny

Układ równań nazywamy **jednorodnym** jeśli każdy wyraz wolny jest równy zero (czyli $B = 0$). Każdy układ jednorodny posiada co najmniej jedno rozwiązanie $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Wzory Cramera mówią, że jeśli macierz współczynników układu jest kwadratowa i odwracalna to układ jednorodny ma dokładnie jedno rozwiązanie zerowe. Oznaczmy przez $\mathbb{S}$ zbiór wszystkich rozwiązań układu jednorodnego $AX = 0$, czyli:

$$\mathbb{S} = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} ;\ A \cdot X = 0 \right\}$$

Stwierdzenie 1 *Zbiór $\mathbb{S}$ z działaniem $+$ jest grupą abelową.*

Dowód Niech X, Y będą rozwiązaniami układu $AX = 0$, tzn. $AX = 0$ i $AY = 0$, wtedy $A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$. Podobnie $A(-X) = -AX = 0$ i $A0 = 0$.■

Niech

$$AX = B$$

będzie pewnym układem m równań z n niewiadomymi i niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będzie jakimkolwiek rozwiązaniem tego układu. Oznaczmy przez C macierz kolumnową $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$. Oznaczamy przez $C+\mathbb{S}$ zbiór elementów postaci $C+X$, takich że $X \in \mathbb{S}$:

$$C + \mathbb{S} = \{C + X;\ X \in \mathbb{S}\}$$

Stwierdzenie 2 *Niech $AX = B$ będzie pewnym układem równań, niech $C = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ będzie dowolnym rozwiązanie tego układu i niech $\mathbb{S}$ będzie zbiorem rozwiązań układu jednorodnego $AX = 0$ wtedy zbiór rozwiązań układu $AX = B$ jest postaci:*

$$C + \mathbb{S} = \{C + X;\ X \in \mathbb{S}\}$$

Dowód Niech D będzie dowolnym rozwiązaniem układu $AX = B$ wtedy mamy $AD = B$ oraz $AC = B$ odejmując te równości stronami otrzymujemy: $A(D-C) = 0$, zatem $D-C \in \mathbb{S}$. To oznacza, że $D \in C+\mathbb{S}$. Jeśli $D \in C+\mathbb{S}$ to dla pewnego $X \in \mathbb{S}$ mamy: $AD = A(C+X) = AC + AX = B + 0 = B$ czyli $C + X$ jest rozwiązaniem naszego układu.■

Stwierdzenie 3 *Niech $\mathbb{S}$ będzie zbiorem rozwiązań układu $AX=0$ wtedy istnieje dokładnie $\mathrm{r}(A)$ elementów $X_1, X_2, \dots, X_{\mathrm{r}(A)} \in S$, że każdy inny element $X \in \mathbb{S}$ da się zapisać w postaci:*

$$X = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_{\mathrm{r}(A)} X_{\mathrm{r}(A)}$$

dla pewnych $t_1, t_2, \dots, t_{\mathrm{r}(A)} \in K$.

Łącząc dwa ostatnie stwierdzenia mamy, że każde rozwiązanie układu $AX = B$ da się przedstawić w postaci:

$$X = C + t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_{\mathrm{r}(A)} X_{\mathrm{r}(A)}$$

gdzie $X_1, X_2, \dots, X_{\mathrm{r}(A)}$ są rozwiązaniami układu jednorodnego $AX = 0$, a C jest jakimkolwiek rozwiązaniem układu $AX = B$, t_i są dowolnymi elementami ciała K. Taki sposób przedstawienia nazywamy **fundamentalnym układem rozwiązań**.
Dany jest układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Z macierzą współczynników A i kolumną wyrazów wolnych B. Macierz $[A, B]$ wymiaru $m \times (n+1)$ nazywamy macierzą rozszerzoną. Następujące twierdzenie rozstrzyga kiedy układ równań posiada rozwiązanie.

Twierdzenie 2 (Kronecker-Capelli) (i) *Układ równań* $AX = B$ *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, B])$.
(ii) *Jeśli* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, B]) = n$ *to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.*
(iii) *Jeśli* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, B]) = k < n$ *to układ ma nieskończenie rozwiązań.*

Wniosek 1 *Jeśli* A *jest macierzą kwadratową stopnia* n *to układ jednorodny* $AX = 0$ *ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy* $\det A = 0$.

Dowód

($\Leftarrow$) Jeśli układ posiada niezerowe rozwiązanie to wyznacznik musi być równy zero, bo w przeciwnym przypadku A jest odwracalna i rozwiązanie jest dokładnie jedno (zerowe).

($\Rightarrow$) Jeśli $\det A = 0$ to $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, 0]) = k < n$ i z Twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.$\blacksquare$

Wykorzystanie algorytmu Gaussa w rozwiązywaniu układów równań

Dany jest układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Można zauważyć, że rozwiązanie układu się nie zmieni jeśli do pewnego równania doda się inne pomnożone przez pewną stałą. Nie zmieni się także jeśli zamienimy dwa równania miejscami i jeśli pewne równanie wymnożymy przez niezerową stałą. Jeśli będziemy wykonywać takie przekształcenia to wykonujemy je tylko na współczynnikach równań, czyli na wierszach macierzy rozszerzonej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Możemy więc użyć algorytmu Gaussa do rozwiązywania układów równań.

Przykład Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Przykład Zbadamy rozwiązalność układu równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

Przykład Zbadamy rozwiązalność układu równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Wykorzystanie do odwracania macierzy

Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia n, chcemy wyznaczyć (o ile istnieje) macierz odwrotną do A to znaczy macierz B taką, że $AB = I$. Niech B_i będzie i-tą kolumną macierzy B. Żeby wyznaczyć B trzeba rozwiązać n układów równań:

$$A \cdot B_i = X_i$$

gdzie X_i jest i-tą kolumną macierzy jednostkowej, $i \in \{1, \dots, n\}$. Możemy te układy rozwiązać za jednym razem, to znaczy wykorzystać przekształcenia elementarne do układu (wraz z mnożeniem wiersza przez niezerowy współczynnik):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

W tym przypadku stosujemy przekształcenia tak długo aż dojdziemy po prawej stronie do macierzy jednostkowej, a to co pojawi się po drugiej stronie jest poszukiwaną macierzą odwrotną. Proces, którym tu się posługujemy nazywa się procesem (albo algorytmem) Gaussa-Jordana (różnica ze zwykłym algorytmem Gaussa polega na tym, że tu nie zatrzymujemy się na postaci trójkątnej ale proces prowadzimy dalej redukując wyrazy nad przekątną).

Przykład Odwrócimy, wykorzystując proces Gaussa-Jordana, macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Równania macierzowe

Niech A będzie dowolną macierzą i niech B będzie macierzą. Równanie:

$$AX = B$$

lub

$$XA = B$$

nazywamy **równaniem macierzowym**. Ogólne metody rozwiązywania takich równań są podobne jak metody rozwiązywania równań liniowych. Można zauważyć, że równania drugiego typu można zastąpić równaniem pierwszego typu. Możemy równanie $XA = B$ transponować obustronnie $(XA)^T = B^T$, stąd mamy $A^T X^T = B^T$.

Macierze przemienne

Macierze A i B nazywamy przemiennymi gdy $AB = BA$. Szczególnym równaniem macierzowym jest poszukiwania wszystkich macierzy przemiennych z pewną macierzą.

Przykład Wyznaczymy wszystkie macierze przemienne z macierzą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$