

Wykład 14

Wyznacznik macierzy cd.

Twierdzenie 1 Niech A będzie macierzą kwadratową i niech A_i, A_j będą dwiema różnymi jej kolumnami, wtedy dla dowolnego $k \in K$:

$$\det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] = \det[A_1, \dots, A_i + kA_j, \dots, A_j, \dots, A_n]$$

Dowód Udowodniliśmy, że:

$$\begin{aligned} \det[A_1, \dots, A_i + kA_j, \dots, A_j, \dots, A_n] = \\ \det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, kA_j, \dots, A_j, \dots, A_n] \end{aligned}$$

Ponadto $\det[A_1, \dots, kA_j, \dots, A_j, \dots, A_n] = 0$. ■

Twierdzenie 2 Jeśli macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ jest macierzą trójkątną to:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Dowód Jeśli $\sigma \neq i$ to w wyrażeniu $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ występuje przynajmniej jedno zero. Zatem $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$. ■

Zadanie Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie W Twierdzeniu 1 udowodniliśmy, że wyznacznik macierzy nie zmienia się gdy do pewnego wiersza macierzy dodamy inny pomnożony przez stałą. Możemy więc do drugiego wiersza dodać pierwszy pomnożony przez -2 :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & r_2 - 2r_1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \\ 1 & 0 & -2 & -6 & \end{array} \right| \stackrel{r_2 - 2r_1}{=} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_3 - r_1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \\ 1 & 0 & -2 & -6 & \end{array} \right| \stackrel{r_3 - r_1}{=} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_4 - r_1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & \\ 1 & 0 & -2 & -6 & \end{array} \right| \stackrel{r_4 - r_1}{=} \\ & \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & r_3 - r_2 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_4 - 2r_2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & \\ 0 & -2 & -5 & -10 & \end{array} \right| \stackrel{r_3 - r_2}{=} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_4 - 2r_3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & 5 & 2 & \end{array} \right| \stackrel{r_4 - 2r_3}{=} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_4 \leftrightarrow r_3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array} \right| \stackrel{r_4 \leftrightarrow r_3}{=} \\ & \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & r_4 + 3r_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \end{array} \right| \stackrel{r_4 + 3r_3}{=} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & -1 & -5 & -6 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right| = 1 \end{aligned}$$

Twierdzenie 3 *Jeśli macierz kwadratowa A stopnia n ma postać:*

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

gdzie B i D są macierzami kwadratowymi stopni k i $n - k$, a 0 jest macierzą zerową wymiaru $(n - k) \times k$, to:

$$\det A = (\det B) \cdot (\det D)$$

Zadanie Na podstawie powyższego twierdzenia wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

jest równy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 4 (Cauchy) *Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia n wtedy:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B).$$

Zadanie Udowodnić, że jeśli A jest macierzą odwracalną to $\det A \neq 0$ i $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Rozwiązanie Ponieważ $A \cdot A^{-1} = I$ to mamy $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$. Z twierdzenia Cauchy'ego mamy:

$$1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

zatem $\det A \neq 0$ i otrzymujemy $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Rozwinięcie wyznacznika względem kolumny (wiersza) macierzy

Niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą kwadratową, wtedy przez A_{ij} oznaczać będziemy macierz wymiaru $(n - 1) \times (n - 1)$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Twierdzenie 5 (Laplace) *Niech A będzie macierzą stopnia n wtedy:*

$$\det A = a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j} \det A_{2j} + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \det A_{nj},$$

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in}.$$

Pierwszy z powyższych wzorów nazywamy rozwinięciem wyznacznika względem j -tej kolumny, a drugi względem i -tego wiersza.

Zadanie Obliczyć wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie Rozwińmy ten wyznacznik względem drugiego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Często wyznaczniki oblicza się łącząc różne metody. Jeśli korzystamy z rozwinięcia wyznacznika dobrze jest czasem wyzerować niektóre elementy w wierszu.

Zadanie Obliczyć wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie Możemy najpierw wyzerować elementy w pierwszej kolumnie pod pierwszym wierszem, a następnie rozwinąć względem pierwszej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 + w_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą kwadratową, wtedy **dopełnieniem algebraicznym elementu** a_{ij} nazywać będziemy element $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, a macierz:

$$A^D = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Obliczmy następujący iloczyn $A \cdot (A^D)^T$:

1. Iloczyn i -tego wiersza i i -tej kolumny wynosi:

$$[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + \dots + a_{in}b_{in} = \\ a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in} = \det A$$

2. Iloczyn i -tego wiersza i j -tej kolumny dla $i \neq j$ wynosi:

$$[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{jn} = \\ a_{i1}(-1)^{j+1} \det A_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2} \det A_{j2} + \dots + a_{in}(-1)^{j+n} \det A_{jn} = 0$$

ostatnia równość wynika z faktu, że $a_{i1}(-1)^{j+1} \det A_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2} \det A_{j2} + \dots + a_{in}(-1)^{j+n} \det A_{jn}$ jest wyznacznikiem macierzy, która powstała z macierzy A przez zastąpienie j -tego wiersza wierszem i -tym, więc wyznacznik ten jest równy 0. Zatem mamy:

$$A \cdot (A^D)^T = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det A & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

co oznacza, że jeśli $\det A \neq 0$ to macierz A jest odwracalna. Udowodniliśmy, następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6 *Macierz kwadratowa A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$.*

Konstrukcja macierzy odwrotnej

Powtórzmy jeszcze raz konstrukcję macierzy odwrotnej. Jeśli $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ jest macierzą kwadratową stopnia n to mamy:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^D)^T$$

gdzie $A^D = [b_{ij}]_{n \times n}$, $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, macierz A_{ij} jest macierzą kwadratową stopnia $n - 1$, która powstała z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Zadanie Wyznaczyć macierz odwrotną do:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia elementarne wierszy macierzy

Niech A będzie dowolną macierzą o wymiarze $m \times n$ o współczynnikach z pewnego ciała K i niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. **Przekształceniem elementarnym** wierszy macierzy A nazywamy jedno z poniższych przekształceń:

- (1) zamiana dwóch wybranych wierszy macierzy,
- (2) dodanie do wiersza A_i wiersza kA_j (dla $i \neq j$).
- (3) pomnożenie wybranego wiersza przez pewien element niezerowy element ciała K .

Można również mówić o przekształceniach elementarnych kolumn macierzy.

Wniosek 1 *Jeśli macierz A jest kwadratowa to pierwsze z przekształceń elementarnych zmienia tylko znak wyznacznika, a drugie nie zmienia wyznacznika macierzy A .*

Macierz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy **macierzą trapezową** jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym wiersze od pierwszego do k -tego są niezerowe

Twierdzenie 7 *Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$, wtedy przy pomocy przekształceń elementarnych można macierz A sprowadzić do pewnej macierzy trapezowej.*

Dowód W dowodzie wykorzystujemy tzw **Algorytm Gaussa**

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ będzie dowolną macierzą. Jeśli $a_{11} \neq 0$ to można przy pomocy tego elementu wyzerować wszystkie elementy leżące pod nim w pierwszej kolumnie w następujący sposób:

od wiersza i -tego $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez współczynnik (jest to przekształcenie (2)) $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ czyli $\frac{a_{i1}}{a_{11}}[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$ otrzymując: $[0, a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12}, \dots, a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n}]$. W ten sposób pod elementem pierwszym w pierwszej kolumnie pojawiają się zera. Jeśli element $a_{11} = 0$ to możemy zastosować przekształcenie (1), sprawdzamy który z elementów a_{i1} jest niezerowy i przestawiamy wiersze. Po dokonaniu tych przekształceń otrzymujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{23} & a'_{33} & \dots & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalej postępujemy tak samo dla macierzy $(m-1) \times (n-1)$:

$$\begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2n} \\ a'_{23} & a'_{33} & \dots & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

Zadanie Sprowadzić do postaci trapezowej macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Rzędem macierzy A wymiaru $m \times n$ nazywamy ilość niezerowych wierszy postaci trapezowej macierzy A i oznaczamy go przez $r(A)$.

Uwaga 1 Jeśli macierz A ma wymiar $m \times n$ to $r(A) \leq \min(m, n)$.

Uwaga 2 $r(A) = r(A^T)$.

Uwaga 3 Rząd macierzy kwadratowej A stopnia n wynosi dokładnie n wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$.

Zadanie Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od parametru a :

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Inne podejście

Niech A będzie macierzą $m \times n$ wtedy **minorem stopnia** $k \leq \min(m, n)$ tej macierzy nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z A przez skreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn.

Przykład Minorami stopnia 2 macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

są na przykład $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (wykreślono ostatni wiersz oraz trzecią i czwartą kolumnę), lub $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (wykreślono drugi wiersz oraz drugą i czwartą kolumnę).

Twierdzenie 8 *Rząd macierzy A jest równy stopniowi maksymalnego niezerowego minora zawartego w macierzy A .*