Wykład 13

Wyznacznik macierzy

W zbiorze permutacji S_n określamy funkcję sgn [1] o wartościach w zbiorze $\{-1, 1\}$, następująco:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{gdy permutacja } \sigma \text{ jest parzysta} \\ -1, & \text{gdy permutacja } \sigma \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n o współczynnikach z ciała K ($A \in M_n(K)$) i niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. **Wyznacznikiem** macierzy A nazywamy następujący element ciała K:

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Suma, która określa tan wyznacznik ma $n!$ składników. Każdy składnik jest iloczynem n elementów po jednym z każdego wiersza i każdej kolumny. Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ oznaczamy przez $\det(A)$ lub przez $|A|$. Czasem, żeby uwypuklić stopień macierzy będziemy mówić o wyznaczniku stopnia n.

Przykład Obliczymy korzystając z definicji wyznacznik macierzy 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Zbiór permutacji S_2 składa się z dwóch elementów:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

permutacja i jest parzysta, a permutacja σ_1 nieparzysta. Zatem

$$\operatorname{sgn}(i) = 1,\ \operatorname{sgn}(\sigma_1) = -1.$$

Wtedy wprost z definicji mamy:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} =$$
$$\operatorname{sgn}(i) a_{1,i(1)} a_{2,i(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Przykład Obliczymy wyznacznik macierzy 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

[1] sgn jest skrótem łacińskiego słowa signum (znak)

Zbiór permutacji S_3 składa się z sześciu permutacji:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Permutacje $\sigma_0, \sigma_4, \sigma_5$ są parzyste, a permutacje $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nieparzyste. Mamy więc:

$$\begin{array}{c} \mathrm{sgn}(\sigma_0) = \mathrm{sgn}(\sigma_4) = \mathrm{sgn}(\sigma_5) = 1 \\ \mathrm{sgn}(\sigma_1) = \mathrm{sgn}(\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_3) = -1 \end{array}$$

Z definicji mamy:

$$\begin{array}{l} \det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} = \\ \mathrm{sgn}(\sigma_0) a_{1,\sigma_0(1)} a_{2,\sigma_0(2)} a_{3,\sigma_0(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} a_{3,\sigma_1(3)} + \\ \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} a_{3,\sigma_2(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_3) a_{1,\sigma_3(1)} a_{2,\sigma_3(2)} a_{3,\sigma_3(3)} + \\ \mathrm{sgn}(\sigma_4) a_{1,\sigma_4(1)} a_{2,\sigma_4(2)} a_{3,\sigma_4(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_5) a_{1,\sigma_5(1)} a_{2,\sigma_5(2)} a_{3,\sigma_5(3)} = \\ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}. \end{array}$$

Zadanie Obliczyć z definicji wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie Wyznacznik ten jest sumą $4! = 24$ bloków składających się z iloczynu czterech elementów po jednym z każdego wiersza i każdej kolumny. Można zauważyć, że większość z tych bloków będzie zawierała zero więc nie wpływa na wyznacznik. Niezerowe bloki to:

$$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}, \; a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}, \; a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}, \; a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$

Musimy jeszcze ustalić parzystość permutacji występujących w tych blokach $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Pierwsza i ostatnia są parzyste, natomiast dwie środkowe są nieparzyste, zatem wyznacznik ten jest równy:

$$\begin{array}{l} a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} = \\ 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \end{array}$$

Własności wyznaczników

Twierdzenie 1 *Dla dowolnej macierzy kwadratowej A mamy:*

$$\det A = \det A^T$$

Dowód Wynika to z faktu, że prawdziwa jest następująca równość:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Równość ta jest prawdziwa bo możemy każdy z bloków uporządkować według numerów kolumn od pierwszego do ostatniego i mamy

$$a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \ldots a_{\sigma^{-1}(n),n}$$

oraz $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. Zauważmy, że jeśli $A = [a_{ij}]$ i $A^T = [b_{ij}]$ to $b_{ij} = a_{ji}$, zatem mamy:

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} =$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det A. \blacksquare$$

Niech $A = [a_{ij}]$, wtedy A_i będzie oznaczać i-tą (dla $i \in \{1, \ldots, n\}$) kolumnę macierzy A, zatem $A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$. Macierz A możemy zatem zapisać w postaci:

$$A = [A_1, A_2, \ldots, A_n].$$

Twierdzenie 2 *Dla dowolnego $k \in K$ i dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, mamy:*

$$\det[A_1, A_2, \ldots, kA_i, \ldots, A_n] = k \det[A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n]$$

Można zauważyć, że ostatnie twierdzenie jest prawdziwe dla mnożenia wiersza macierzy przez pewny element ciała K.

Zadanie Pokazać, że jeśli jedna z kolumn macierzy jest zerowa to wyznacznik jest równy zero.

Zadanie Udowodnić, że dla dowolnego $k \in K$ i dla każdej macierzy A stopnia n mamy:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

Twierdzenie 3 *Dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jeśli $i \neq j$ to mamy:*

$$\det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = -\det[A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n].$$

Dowód Niech $A = [a_{ij}]$ wtedy mamy:

$$\det[A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{j,\sigma(j)} \ldots a_{i,\sigma(i)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$$

Aby zobaczyć jaki związek ma ten wyznacznik z wyznacznikiem macierzy A trzeba dokonać transpozycji elementów $a_{i,\sigma(i)}$ i $a_{j,\sigma(j)}$. Żeby tego dokonać trzeba naszą permutację σ wymnożyć przez transpozycję $(\sigma(i), \sigma(j))$ otrzymując permutację $(\sigma(i), \sigma(j))\sigma$, a to oznacza zmianę znaku, czyli zmianę znaku przy każdym bloku.■

Zadanie Udowodnić, że jeśli dwie kolumny macierzy A są proporcjonalne to znaczy mamy $A_i = kA_j$ dla pewnych kolumn A_i, A_j oraz $k \in K$ to $\det A = 0$.

Rozwiązanie Jeśli $A_i = kA_j$ to mamy:

$$\begin{aligned}
&\det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = \det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, kA_i, \ldots, A_n] = \\
&k \det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n] = -k \det[A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n] = \\
&-k \det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n],
\end{aligned}$$

stąd $\det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = 0$.

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie 4 *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n]$ i dla dowolnej macierzy kolumnowej $B_k = [b_i]_{n \times 1}$ zachodzi równość:*

$$\det[A_1, \ldots, A_k + B_k, \ldots, A_n] = \det A + \det[A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n]$$

Dowód Wprost z definicji wyznacznika mamy:

$$\begin{aligned}
&\det[A_1, \ldots, A_k + B_k, \ldots, A_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots (a_{k,\sigma(k)} + b_{k,\sigma(k)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} = \\
&\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots b_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \\
&\det A + \det[A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n].
\end{aligned}$$