Wykład 12

Permutacje

Niech X będzie zbiorem. Każdą wzajemnie jednoznaczną funkcję przekształcającą X na X nazywamy permutacją zbioru X. Zbiór wszystkich permutacji zbioru X oznaczamy przez $S(X)$.

Uwaga 1 *Permutacjami są wszystkie wzajemnie jednoznaczne przekształcenia to znaczy funkcje, które są różnowartościowe i są 'na'.*

Jeśli $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ to zamiast $S(X)$ będziemy pisać S_n. W zbiorze S_n można wprowadzić działanie $\circ$ składania przekształceń.

Twierdzenie 1 *Struktura* $(S_n, \circ)$ *jest grupą. Ponadto* $\bar{\bar{S}}_n = n!$ *i jeśli* $n > 2$ *to* S_n *jest grupą nieabelową.*

Dowód Działanie składania przekształceń jest łączne. Elementem neutralnym tego działania jest funkcja identycznościowa $i(x) = x$ i ponieważ elementami zbioru S_n są funkcje wzajemnie jednoznaczne to są to funkcje odwracalne.$\blacksquare$

Każdą permutację ze zbioru S_n można przedstawić w sposób "blokowy", tzn. jeśli $\sigma \in S_n$ to:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Przykład Elementami zbioru S_3 są następujące permutacje:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zadanie Ułożyć tabelkę składania permutacji w zbiorze S_3.
Zadanie Wyznaczyć σ^{-1} jeśli:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie Wystarczy zamienić wiersze miejscami i uporządkować:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Permutację $\tau \in S_n$ nazywamy **cyklem** jeśli istnieje podzbiór $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że

$$i_1 \xrightarrow{\tau} i_2 \xrightarrow{\tau} \ldots \xrightarrow{\tau} i_k \xrightarrow{\tau} i_1$$

i τ działa tożsamościowo na pozostałych elementach zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Przykład Permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

jest cyklem bo naszym podzbiorem jest $\{1, 3, 4, 5\}$. A permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nie jest cyklem.

Cykle będziemy zapisywać w postaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Zatem w naszym przykładzie pierwsza permutacja jest cyklem $(1, 3, 4, 5)$. Natomiast druga jest iloczynem cykli $(1, 3, 4, 5)(2, 6)$. Dwa cykle nazywamy **rozłacznymi** jeśli zbiory poruszanych przez nie elementów są rozłączne.

Twierdzenie 2 *Każda permutacja jest iloczynem cykli rozłącznych.*

Zadanie Zapisać permutację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

w postaci iloczynu cykli rozłącznych.
Rozwiązanie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1, 3, 4, 5)(2, 6)(7, 9, 8)$$

Zadanie Zapisać wszystkie permutacje ze zbioru S_3 w postaci iloczynu cykli.
Zadanie Wymnożyć permutacje $[(1, 2, 3, 4)(7, 8)][(1, 2, 3, 5, 6)(4, 7)]$
Rozwiązanie

$$[(1, 2, 3, 4)(7, 8)][(1, 2, 3, 5, 6)(4, 7)] = (1, 3, 5, 6, 2, 4, 8, 7).$$

Każdy cykl postaci (i, j) nazywamy **transpozycją**.

Twierdzenie 3 *Każdą permutację do się zapisać w postaci iloczynu transpozycji.*

Dowód Wystarczy udowodnić, że dowolny cykl jest iloczynem transpozycji. Rzeczywiście mamy:

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k) = (i_1, i_k)(i_1, i_{k-1}) \ldots (i_i, i_2)$$

Zadanie Zapisać permutację:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

jako iloczyn transpozycji.
Rozwiązanie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1,3,4,5)(2,6)(7,9,8)$$
$$(1,3,4,5)(2,6)(7,9,8) = (1,5)(1,4)(1,3)(2,6)(7,8)(7,9)$$

Mówimy, że permutacja jest **parzysta** jeśli rozkłada się na parzystą ilość transpozycji i że jest **nieparzysta** jeśli rozkłada się na nieparzystą ilość transpozycji.

Uwaga 2 *Można udowodnić, że zbiory permutacji parzystych i nieparzystych są rozłączne.*

Zadanie Czy permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

jest parzysta?
Rozwiązanie Permutacja ta jest parzysta bo udowodniliśmy wcześniej, że rozkłada się na sześć (czyli parzystą ilość) transpozycji.

Oznaczmy przez A_n zbiór wszystkich permutacji parzystych. Wtedy działanie $\circ$ jest dobrze określone w zbiorze A_n i mamy:

Twierdzenie 4 *Struktura* $(A_n, \circ)$ *jest grupą. Ponadto* $\bar{\bar{A}}_n = \frac{n!}{2}$.

Inny sposób badania, czy permutacja jest parzysta.
Jeśli $\sigma \in S_n$ to mówimy, że dla $i < j$ zachodzi **inwersja** jeśli $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Twierdzenie 5 *Permutacja* σ *jest parzysta wtedy i tylko wtedy gdy ma parzystą ilość inwersji.*

Zadanie Ile inwersji ma permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}?$$

Rozwiązanie Permutacja ta ma 10 inwersji (a więc jest permutacją parzystą).

Niech $\sigma \in S_n$ mówimy, że liczba naturalna k, jest **rzędem** permutacji σ jeśli $\sigma^k = i$, $k \neq 0$ oraz jeśli $\sigma^l = i$ to $k \leqslant l$.

Twierdzenie 6 *Rzędem cyklu jest jego długość. Jeśli permutacja jest iloczynem cykli rozłącznych to jej rzędem jest najmniejsza wspólna wielokrotność długości cykli wchodzących w jej zapis.*

Przykład Rzędem permutacji $(1, 3, 5, 4, 6)$ jest 5, a rzędem permutacji

$$(1, 3, 4, 5)(2, 6, 7, 8, 9, 10)$$

jest $\mathrm{NWW}(4, 6) = 12$.
Zadanie Obliczyć $[(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^{12345}$.
Rozwiązanie Permutacja $(2, 3, 4, 5)(1, 6)$ ma rząd 4. Zatem

$$[(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^{4k} = i^k = i.$$

Trzeba więc podzielić liczbę 12345 przez 4 z resztą. Mamy $12345 = 4 \cdot 3086 + 1$ to oznacza, że:

$$\begin{aligned} &[(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^{12345} = [(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^{4 \cdot 3086+1} = \\ &([(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^4)^{3086}[(2, 3, 4, 5)(1, 6)]^1 = (2, 3, 4, 5)(1, 6). \end{aligned}$$

Zadanie Rozwiązać równanie:

$$\alpha^{185}\beta^{243}x\alpha^{125}\beta^{277} = \alpha^{49}\beta^{76},$$

gdzie $\alpha = (1, 2, 3, 4)$, $\beta = (1, 2)(3, 4, 5)$, a x jest niewiadomą.