

Wykład 11

Macierze cd.

Jeśli macierz ma tyle samo wierszy co kolumn to macierz taką nazywamy **macierzą kwadratową**. Mówimy, że A jest macierzą stopnia n jeśli ma wymiar $n \times n$. Zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała K oznaczamy będziemy przez $M_n(K)$. Jeśli $A \in M_n(K)$ to:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nazywamy **główną przekątną** macierzy A . Macierz kwadratową nazywamy macierzą **trójkątną górną** jeśli pod główną przekątną występują same zera. Analogicznie można mówić o macierzy trójkątnej dolnej. Macierz nazywamy macierzą **diagonalną** jeśli jest zarazem macierzą trójkątną górną i macierzą trójkątną dolną. To znaczy macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest diagonalna jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Jeśli A, B są macierzami kwadratowymi stopnia n to istnieje iloczyn $A \cdot B$ i jest on również macierzą kwadratową stopnia n . Zatem mnożenie macierzy jest dobrze określonym działaniem w zbiorze $M_n(K)$.

Twierdzenie 1 *Struktura $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jednością. Ponadto jeśli $n > 1$ to pierścień ten jest nieprzemienne.*

Dowód

1. Udowodniliśmy na poprzednim wykładzie, że struktura $(M_n(K), +)$ jest grupą abelową.
2. Działanie \cdot jest łączne. Niech $A, B, C \in M_n(K)$, wtedy:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times n}, C = [c_{ij}]_{n \times n}.$$

Niech $D = A \cdot B$ oraz $E = B \cdot C$, i niech $D = [d_{ij}]$, $E = [e_{ij}]$ i mamy:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, e_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj}.$$

Oznaczmy przez $F = (AB)C = DC = [f_{ij}]$, a przez $G = A(BC) = AE = [g_{ij}]$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{l=1}^n d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kl}c_{lj}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_{ik}b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^n b_{kl}c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik}e_{kj} = g_{ij} \end{aligned}$$

Stąd $F = G$, więc $(AB)C = A(BC)$, czyli mnożenie jest łączne.

3. Działanie \cdot jest rozdzielne względem $+$, zatem dla $A, B, C \in M_n(K)$ mamy:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Dowodzi się to podobnie jak punkt 2.

4. Jednością pierścienia (czyli elementem neutralnym mnożenia macierzy) jest macierz I , która na głównej przekątnej ma jedynki, a w pozostałych miejscach 0, czyli $I = [\delta_{ij}]$, gdzie:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

Funkcja δ_{ij} nazywana jest **delta Kroneckera**. Możemy zapisać macierz I wprost:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład Pierścień $M_2(Z_2)$ składa się z 16 macierzy 2×2 o współczynnikach z ciała Z_2 .

Można wprowadzić też mnożenie macierzy przez elementy ciała. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ i niech $k \in K$, wtedy:

$$kA = [ka_{ij}].$$

Przykład

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -4 & 8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach z ciała K i niech $A \in M_n(K)$, wtedy:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Zadanie Wyznaczyć $f(A)$, gdzie $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ będzie macierzą $m \times n$, o współczynnikach z ciała K . Przez A^T oznaczymy macierz o wymiarze $n \times m$, powstałą z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny.

Przykład

1.

$$[1, 2, 3, 4]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Operację T nazywamy transponowaniem macierzy, a macierz A^T macierzą transponowaną.

Własności transponowania

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
2. $(kA)^T = kA^T$,
3. $(AB)^T = B^T A^T$.
4. $(A^T)^T = A$.

Dowód Udowodnimy punkt 3. Jeśli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ to $A^T = [a_{ij}^T]_{n \times m}$, gdzie $a_{ij}^T = a_{ji}$, podobnie jeśli $B = [b_{ij}]_{n \times k}$ to $B^T = [b_{ij}^T]_{k \times n}$, gdzie $b_{ij}^T = b_{ji}$. Niech $C = AB$ wtedy wymiar C jest równy $m \times k$ i jeśli $C = [c_{ij}]_{m \times k}$ to mamy:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj},$$

stąd

$$c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{li} = \sum_{l=1}^n a_{lj}^T b_{il}^T = \sum_{l=1}^n b_{il}^T a_{lj}^T,$$

to nam daje równość $(AB)^T = B^T A^T$.

Mówimy, że macierz stopnia n jest **symetryczna** jeśli jest symetryczna względem głównej przekątnej.

Przykład Macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna.

Stwierdzenie 1 *Macierz A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy gdy $A^T = A$.*

Z własności transponowania wynika, że jeśli macierze A i B są symetryczne to $A + B$ też jest macierzą symetryczną oraz dla dowolnego $k \in K$ macierz kA jest symetryczna (o ile A jest symetryczna).

Macierz stopnia n nazywamy **antysymetryczną** jeśli $A^T = -A$.

Zadanie Udowodnić, że jeśli macierz jest antisymetryczna to na głównej przekątnej ma same zera.

Zadanie Udowodnić, że jeśli A i B są macierzami antisymetrycznymi to $A + B$ jest również antisymetryczna.

Macierze kwadratowe, które posiadają macierze odwrotne nazywać będziemy macierzami odwracalnymi. Zbiór macierzy odwracalnych stopnia n o współczynnikach z ciała K oznaczamy przez $GL_n(K)$.

Uwaga 1 *Wcześniej udowodniliśmy, że zbiór elementów odwracalnych pierścienia stanowi grupę. To znaczy, że struktura $(GL_n(K), \cdot)$ jest grupą.*

Poznamy później efektywne metody wyznaczania macierzy odwrotnej i kryterium, które pozwala dosyć łatwo rozstrzygać, czy macierz jest odwracalna. Potrzebne do tego nam będą pewne wiadomości na temat permutacji.