Wykład 10

Wielomiany cd.

Niech $f(x), g(x) \in K[x]$ będą wielomianami nad ciałem K. Wielomian $d(x) \in K[x]$ nazywamy **największym wspólnym dzielnikiem** wielomianów $f(x)$ i $g(x)$ jeśli:
1. $d(x)$ jest unormowany,
2. $d(x)|f(x)$ i $d(x)|g(x)$,
3. jeśli $c(x)$ jest wielomianem, takim że $c(x)|f(x)$ i $c(x)|g(x)$ to $\mathrm{st}c \leqslant \mathrm{st}d$.
Piszemy wtedy $d(x) = \mathrm{NWD}(f(x), g(x))$.

Jeśli $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ to $\mathrm{NWD}(f(x), g(x)) = \mathrm{NWD}(g(x), r(x))$.

Algorytm Euklidesa [1]

Niech $\mathrm{st}f > \mathrm{st}g$, wtedy możemy podzielić wielomian f przez g z resztą, a więc:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad 0 \leqslant \mathrm{st}r < \mathrm{st}g,$$

można zauważyć, że $\mathrm{NWD}(f(x), g(x)) = \mathrm{NWD}(g(x), r(x))$, można więc kontynuować proces dzielenia wielomianów z resztą:

$$\begin{array}{l}
g(x) = q_1(x)r(x) + r_r(x), \quad 0 \leqslant \mathrm{st}r_1 < \mathrm{st}r, \\
r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \quad 0 \leqslant \mathrm{st}r_2 < \mathrm{st}r_1, \\
r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x), \quad 0 \leqslant \mathrm{st}r_3 < \mathrm{st}r_2, \\
\ldots
\end{array}$$

ciąg kolejnych reszt ma malejące stopnie, a więc dojdziemy do reszty, której stopień będzie równy 0, zatem:

$$\begin{array}{l}
r_n(x) = q_{n+2}(x)r_{n+1}(x) + r_{n+2}(x), \\
r_{n+1}(x) = q_{n+3}(x)r_{n+2}(x)
\end{array}$$

Można też zauważyć, że

$$\mathrm{NWD}(f(x), g(x)) = \mathrm{NWD}(r(x), r_1(x)) = \ldots = \mathrm{NWD}(r_{n+2}(x), 0),$$

zatem mamy $\mathrm{NWD}(f(x), g(x)) = r_{n+2}(x)$ a to oznacza, że największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów jest równy ostatniej niezerowej reszcie w powyższym ciągu. Podobnie jak w przypadku liczb całkowitych można, na podstawie powyższego algorytmu, rozwiązywać równanie (wielomianowe) postaci:

$$f(x)v(x) + g(x)u(x) = \mathrm{NWD}(f(x), g(x)).$$

[1] Euklides matematyk grecki - dał podwaliny współczesnej geometrii

Zadanie Wyznaczyć NWD$(x^2, x^5 + x + 1)$.

Zadanie Wyznaczyć liczbę odwrotną do $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.
Rozwiązanie Zauważmy, że liczba $\sqrt[3]{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x) = x^3-2$. Rozważmy wielomian $g(x) = 1+x+x^2$. Wtedy $g(\sqrt[3]{2}) = 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, a więc wartość wielomianu $g(x)$ w punkcie $\sqrt[3]{2}$ jest równy liczbie, którą chcemy odwrócić. Zastosujmy algorytm euklidesa do wielomianów $f(x)$ oraz $g(x)$:

$$x^3 - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 1$$

stąd

$$1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x^3 - 2)$$

Po podstawieniu $\sqrt[3]{2}$ za x mamy:

$$1 = (\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + ((\sqrt[3]{2})^3 - 2)$$

a więc

$$1 = (\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

To oznacza, że liczbą odwrotną do $1 = (\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ jest $\sqrt[3]{2} - 1$

Macierze

Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $m, n \in \mathbb{N}$. Układ mn elementów ciała K ułożonych w prostokątną tablicę z m wierszy i n kolumn nazywamy macierzą nad ciałem K i oznaczamy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_{ij} \in K,\ i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$. Czasem w skrócie będziemy pisać $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Element a_{ij} położony jest w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy A.
Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0,5 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1,2 & 4 \end{bmatrix}$$

jest macierzą 3×4 o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$. Na przykład $a_{24} = 3$ jest elementem z drugiego wiersza i czwartej kolumny.

Zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o współczynnikach z ciała K oznaczamy przez $M_{m,n}(K)$. W zbiorze $M_{m,n}(K)$ można wprowadzić działanie dodawania $+$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1 *Struktura* $(M_{m,n}(K),+)$ *jest grupą abelową.*

Niech A będzie $m \times n$ macierzą, a B macierzą stopnia $n \times k$, wtedy mamy:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \; B = [b_{ij}]_{n\times k},$$

można wtedy wprowadzić działanie mnożenia $\cdot$:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m\times k},$$

gdzie:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Inaczej mówiąc element c_{ij} z i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy C powstaje przez wymnożenie i-tego wiersza $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ macierzy A przez j-tą kolumnę $\begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{bmatrix}$ macierzy B. Mamy zatem:

$$c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Przeanalizujmy mnożenie macierzy na przykładach:
Przykłady
1.
$$[2,3,4,5]\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\\6\end{bmatrix}=[2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 3+5\cdot 6]=[47],$$
ponieważ pierwsza macierz ma wymiar 1×4, a druga 4×1 to wynik jest macierzą 1×1.
2.
$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\6\end{bmatrix}\cdot[2,3,4,5]=C$$
jest to iloczyn macierzy 4×1 i 1×4, zatem wynik jest macierzą 4×4. Mamy więc:
$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}\\c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}\end{bmatrix}$$
gdzie:
$$\begin{array}{llll}c_{11}=a_{11}b_{11}=2\cdot 2 & c_{12}=a_{11}b_{12}=2\cdot 3 & c_{13}=a_{11}b_{13}=2\cdot 4 & c_{14}=a_{11}b_{14}=2\cdot 5\\ c_{21}=a_{21}b_{11}=1\cdot 2 & c_{22}=a_{21}b_{12}=1\cdot 3 & c_{23}=a_{21}b_{13}=1\cdot 4 & c_{24}=a_{21}b_{24}=1\cdot 5\\ c_{31}=a_{31}b_{11}=3\cdot 2 & c_{32}=a_{31}b_{12}=3\cdot 3 & c_{33}=a_{31}b_{13}=3\cdot 4 & c_{34}=a_{31}b_{14}=3\cdot 5\\ c_{41}=a_{41}b_{11}=6\cdot 2 & c_{42}=a_{41}b_{12}=6\cdot 3 & c_{43}=a_{41}b_{13}=6\cdot 4 & c_{44}=a_{41}b_{14}=6\cdot 5\end{array}$$
zatem:
$$C=\begin{bmatrix}4&6&8&10\\2&3&4&5\\6&9&12&15\\12&18&24&30\end{bmatrix}$$
3.
$$\begin{bmatrix}1&3&5\\-1&0&2\\4&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&3&2\\3&-2&-1\end{bmatrix}=C$$
Jest to iloczyn dwóch macierzy wymiaru 3×3. Zatem wynik jest również macierzą 3×3 i mamy:
$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 18 \\
c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 1 \\
c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 0 \\
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 6 \\
c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -6 \\
c_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -1 \\
c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2 \\
c_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 3 \\
c_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -7
\end{aligned}
$$