Wykład 9

Wielomiany

Element $a \in K$ nazywamy t-krotnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ jeśli $(x-a)^t | f(x)$ i $(x-a)^{t+1} \nmid f(x)$.

Jeśli krotność pierwiastka jest większa od 1 to mówimy, że pierwiastek jest wielokrotny.

Pochodną wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ nazywamy wielomian:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1,$$

gdzie $na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$.

Własności pochodnej

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
3. Jeśli $\mathrm{st} f(x) = 0$ to $f'(x) = 0$.

Twierdzenie 1 *Element a jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f'(a) = 0$ i $f(a) = 0$.*

Dowód

($\Rightarrow$) Jeśli a jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$ to istnieje $t > 1$, że $(x-a)^t | f(x)$. Zatem $f(x) = (x-a)^t g(x)$ i na podstawie własności 2. pochodnej mamy:

$$f'(x) = t(x-a)^{t-1}g(x) + (x-a)^t g'(x),$$

a więc a jest również pierwiastkiem wielomianu $f'(x)$.

($\Leftarrow$) Jeśli a jest pierwiastkiem wielomianów $f(x)$ i $f'(x)$ to mamy: $f(x) = (x-a)g(x)$, stąd $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$ i ponieważ a jest pierwiastkiem wielomianu $f'(x)$ to musi być pierwiastkiem wielomianu $g(x)$. Zatem $g(x) = (x-a)h(x)$ i $f(x) = (x-a)^2 h(x)$.■

Zadanie Niech $w_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$. Udowodnić, że $w_n(x)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Rozwiązanie Można udowodnić, że $w_n'(x) = w_{n-1}(x)$. Wtedy mamy:

$$w_n(x) = w_n'(x) + \frac{x^n}{n!},$$

Zatem jeśli a jest pierwiastkiem wielokrotnym to $w_n(a) = w_n'(a) = 0$ i $\frac{a^n}{n!} = 0$. Zatem $a = 0$, ale 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu $w_n(x)$.

Twierdzenie 2 *Wielomian stopnia n posiada maksymalnie n pierwiastków.*

Jeśli wielomian $f(x)$ stopnia n ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to istnieje $c \in K$ i $g(x) \in K[x]$, że:

$$f(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Mówimy, że wielomian $f(x)$ rozkłada się na iloczyn czynników liniowych jeśli:

$$f(x) = c(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_s)^{k_s}.$$

Twierdzenie 3 (Zasadnicze Twierdzenie Algebry) *Każdy wielomian f o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek.*

Wniosek 1 *Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych.*

Twierdzenie 4 *Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i niech liczba zespolona z będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Wtedy liczba $\bar{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu $f(x)$.*

Dowód Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i niech z będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Wtedy mamy $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Ponieważ liczby a_i są rzeczywiste to $\overline{a_i} = a_i$ i mamy:

$$f(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{f(z)} = 0,$$

zatem $\bar{z}$ też jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$.■

Wniosek 2 *Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych i kwadratowych.*

Zadanie Rozłożyć wielomian $x^3 + 1$ nad ciałem liczb rzeczywistych i nad ciałem liczb zespolonych.
Rozwiązanie Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + 1$, zatem dwumian $x + 1$ dzieli $x^3 + 1$. Mamy więc $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Wielomian $x^2 - x + 1$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{R}$ bo nie ma pierwiastków rzeczywistych. Rozłóżmy go nad $\mathbb{C}$. Obliczamy pierwiastki wielomianu $x^2 - x + 1$:

$$\Delta = 1 - 4 = -3,$$
$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$$

i mamy $x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Zatem rozkład wielomianu jest następujący:

-nad $\mathbb{R}$: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$,

-nad $\mathbb{C}$: $x^3+1 = (x+1)(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2})$.

Zadanie Rozłożyć wielomian $x^4+x^3+2x^2+x+1$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ jeśli wiadomo, że i jest jego pierwiastkiem.

Rozwiązanie Ponieważ i jest pierwiastkiem tego wielomianu to również $\bar{i} = -i$jest jego pierwiastkiem. Zatem wielomian jest podzielny przez $(x-i)(x+i) = x^2+1$. Po podzieleniu otrzymujemy: $x^4+x^3+2x^2+x+1 = (x^2+1)(x^2+x+1)$. Dalej postępujemy jak w zadaniu poprzednim.

Wzory na rozwiązywanie równań wielomianowych

Zasadnicze Twierdzenie Algebry orzeka, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony. Pojawia się tu pytanie, czy istnieje jakiś uniwersalny sposób na wyznaczanie pierwiastków dowolnego równania wielomianowego? Okazuje się, że takiego sposobu nie ma. Rozważamy równanie $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, gdzie każdy współczynnik tego równania jest liczbą zespoloną. Wiadomo, że istnieją wzory na rozwiązywanie równań stopnia $2, 3, 4$ (wzór na rozwiązywanie równań kwadratowych został już podany wcześniej, a wzory dla równań stopnia 3 i 4 są dosyć skomplikowane i będą przedstawione na wykładzie z algebry wyższej na semestrze trzecim). Dla równań stopnia większego niż 4 takich wzorów nie ma. To znaczy nie można podać ogólnego wzoru przy pomocy, którego można rozwiązać dowolne równanie stopnia np. 5 (dowód tego faktu podał genialny matematyk francuski Evariste Galois).

Jeśli wielomian ma współczynniki całkowite to istnieje łatwe kryterium do sprawdzania, czy liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu:

Twierdzenie 5 *Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{g}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, którego współczynniki a_i są całkowite to $p|a_0$, a $q|a_n$.*

Przykład Sprawdzić, czy wielomian $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 12$ ma pierwiastki wymierne.

Rozwiązanie Zgodnie z powyższym Twierdzeniem wymiernymi pierwiastkami tego wielomianu mogą być tylko liczby całkowite, które dzielą liczbę -12, a więc liczby $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Po wstawieniu tych liczb za x możemy stwierdzić, że 2 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Następne Twierdzenie daje kryterium rozkładalności wielomianów o współczynnikach wymiernych:

Twierdzenie 6 (Kryterium Eisensteina) *Niech wielomian*

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

ma współczynniki całkowite. Jeśli istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \nmid a_n$, $p|a_{n-1}, p|a_{n-2}, \ldots, p|a_1, p|a_0$ i $p^2 \nmid a_0$ to wielomian $f(x)$ jest nierozkładlny nad ciałem liczb wymiernych.

Przykład Zgodnie z powyższym Twierdzeniem wielomian

$$x^3 + 49x^2 - 7x + 14$$

jest nierozkładalny na ciałem liczb wymiernych (wystarczy przyjąć $p = 7$). Wiemy natomist, że wielomian ten jest rozkładalny nad ciałem liczb rzeczywistych i zespolonych.

Powyższe Twierdzenie nie pozwala nam wprost stwierdzić, czy wielomian $x^5 - 2x^3 + 3x - 1$ jest nierozkładalny bo nie można dla niego znaleźć odpowiedniej liczby pierwszej p.