

## Wykład 8

**Zadanie** Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania  $z^4 - (2 - i)^4 = 0$ .

**Rozwiązanie** Z twierdzenia o pierwiastkowaniu liczb zespolonych wynika, że równanie to ma dokładnie cztery rozwiązania (są to czwarte pierwiastki z liczby  $(2 - i)^4$ ). Jednym z rozwiązań jest liczba  $2 - i$ . Zgodnie z twierdzeniem mając jedno rozwiązanie trzeba je przemnożyć przez czynnik  $\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}$  aby otrzymać pozostałe. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}z_0 &= 2 - i, \\z_1 &= z_0 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = (2 - i)i = 2i + 1, \\z_2 &= z_0 \cdot i^2 = z_1 \cdot i = (2i + 1)i = -2 + i, \\z_3 &= z_2 \cdot i = (-2 + i)i = -2i - 1.\end{aligned}$$

Niech  $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ , to znaczy  $C_n$  jest zbiorem wszystkich  $n$ -tych pierwiastków z 1. Wtedy  $C_n$  ma dokładnie  $n$  elementów i  $(C_n, \cdot)$  jest grupą abelową. Ponadto istnieje element  $z_1 \in C_n$ , że dla każdego  $w \in C_n$  mamy:

$$\exists k \quad w = z_1^k.$$

Rzeczywiście na podstawie twierdzenia mamy:

$$C_n = \left\{ z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} : k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\},$$

i na podstawie wzoru Moivre'a mamy:

$$z_k = z_1^k.$$

Jednym z bezpośrednich wniosków z twierdzenia o pierwiastkowaniu liczb zespolonych jest:

**Wniosek 1** *Dla każdej liczby zespolonej  $z$  istnieją dokładnie dwie liczby zespolone  $w$ , takie że  $w^2 = z$ . (Inaczej mówiąc każdą liczbę zespoloną można spierwiastkować.)*

Wniosek ten pozwala nam rozwiązywać dowolne równanie stopnia drugiego w ciele liczb zespolonych.

Rozważmy równanie:

$$az^2 + bz + c = 0$$

gdzie  $a, b, c$  są dowolnymi liczbami zespolonymi, a  $z$  jest niewiadomą. Wtedy równanie to ma zawsze pierwiastek w ciele liczb zespolonych. Rzeczywiście:

$$az^2 + bz + c = a \left( z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

stąd otrzymujemy równanie:

$$a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

czyli

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

i ponieważ w ciele liczb zespolonych liczbę  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  można spierwiastkować to istnieją rozwiązania naszego równania. Oznacza to, że algorytm rozwiązywania równania

$$az^2 + bz + c = 0$$

jest dokładnie taki sam jak w ciele liczb rzeczywistych:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ z_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

ale w tym przypadku rozwiązania zawsze istnieją.

**Przykład** Rozwiązać równanie  $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$ .

## Wielomiany

Niech  $K$  będzie ciałem,  $x$  zmienną. Każde wyrażenie postaci:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$  nazywamy wielomianem jednej zmiennej nad ciałem  $K$ . Wyrażenia te należy rozumieć formalnie, a w przypadku gdy  $K$  jest ciałem liczbowym (tzn jednym z ciał:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) to wielomiany jak dawniej można interpretować jako funkcje. Zbiór wszystkich wielomianów na ciałem  $K$  oznaczamy symbolem  $K[x]$ . Jeśli  $f(x) \in K[x]$  i  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  oraz  $a_n \neq 0$  to  $n$  nazywamy stopniem wielomianu  $f(x)$  i piszemy  $\text{st} f = n$ . Jeśli  $\text{st} f = n$  i  $a_n = 1$  to wielomian  $f(x)$  nazywamy **unormowanym**. Jeśli  $\text{st} f = 1$  to wielomian nazywamy wielomianem liniowym.

Jeśli  $K$  jest ciałem to w zbiorze  $K[x]$  można w tradycyjny sposób wprowadzić działania dodawania i mnożenia wielomianów. Jeśli  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  oraz  $n \geq m$  to mamy:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (a_m + b_m) x^m + \dots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0 \\ f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^n c_i x^i \end{aligned}$$

gdzie  $c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$  (trzeba przyjąć, że dla  $l > m$  mamy  $b_l = 0$ ).

**Przykład** Rozpatrujemy wielomiany ze zbioru  $\mathbb{R}[x]$ :

$$(x^3 + 2x^2 - x + 5) + (x^5 - x^3 + x + 4) = x^5 + 2x^2 + 9,$$

$$(x^2 + 1)(x^3 - 1) = x^5 + x^3 - x^2 - 1.$$

**Twierdzenie 1** *Jeśli  $K$  jest ciałem to struktura  $(K[x], +, \cdot)$  jest pierścieniem przemiennym z jednością.*

Niech  $g(x)$  i  $f(x)$  będą wielomianami o współczynnikach z ciała  $K$ . Wtedy mówimy, że wielomian  $g(x)$  dzieli wielomian  $f(x)$  i piszemy  $g(x)|f(x)$  jeśli istnieje wielomian  $h(x) \in K[x]$ , że  $f(x) = h(x)g(x)$ , tzn:

$$g(x)|f(x) \iff \exists h(x) \in K[x] \quad f(x) = h(x)g(x)$$

**Przykład** Wielomian  $x^2 + 1$  dzieli wielomian  $x^5 + x^3 - x^2 - 1$  bo  $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$ .

Wielomian  $f(x)$  nazywamy **rozkładalnym** lub **przywiedlnym** nad ciałem  $K$  jeśli istnieją wielomiany  $g(x)$  i  $h(x)$  takie, że  $f(x) = g(x)h(x)$  i  $\text{stg} > 0$  i  $\text{sth} > 0$ .

**Przykład** Wielomian  $x^4 + 2$  jest rozkładalny nad ciałem  $\mathbb{R}$ , bo

$$x^4 + 2 = (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 = (x^2 - \sqrt{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2}).$$

Natomiast nie jest rozkładalny nad ciałem  $\mathbb{Q}$ .

**Przykład** Wielomian  $x^4 + x^2 + 1$  jest rozkładalny nad ciałem  $Z_2$ , bo

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2.$$

**Twierdzenie 2** *Jeśli  $g(x)$  i  $f(x)$  są wielomianami nad ciałem  $K$  to istnieje dokładnie jedna para wielomianów  $q(x), r(x) \in K[x]$ , że:*

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x),$$

gdzie  $0 \leq \text{str} < \text{st}f$ .

Wielomian  $r(x)$  nazywamy resztą z dzielenia  $g(x)$  przez  $f(x)$ .

Mówimy, że element  $a \in K$  jest **pierwiastkiem** wielomianu  $f(x)$  jeśli  $(x - a)|f(x)$ .

Można mówić o podstawianiu elementu  $a \in K$  za zmienną  $x$ , tzn jeśli  $f(x) \in K[x]$  to

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0.$$

**Twierdzenie 3 (Bezout)** <sup>1</sup> Element  $a \in K$  jest pierwiastkiem wielomianu  $f(x) \in K[x]$  wtedy i tylko wtedy gdy  $f(a) = 0$ .

**Dowód**

( $\Rightarrow$ ) Jeśli  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $f(x)$  to zgodnie z definicją mamy  $(x - a) | f(x)$ . Zatem istnieje  $h(x)$ , że  $f(x) = (x - a)h(x)$ . Stąd mamy  $f(a) = (a - a)h(a) = 0h(a) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Dzielimy wielomian  $f(x)$  przez wielomian  $x - a$  z resztą:

$$f(x) = (x - a)h(x) + r(x),$$

gdzie wielomian  $r(x)$  ma stopień mniejszy od 1. Zatem  $r(x) = c$  jest wielomianem stałym. Podstawiając  $a$  mamy:

$$f(a) = r(a) = c = 0.$$

Zatem:

$$f(x) = (x - a)h(x). \blacksquare$$

Podamy teraz łatwy sposób dzielenia wielomianu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  przez dwumian postaci  $x - c$ . Algorytm ten nazywa się **schema-tem Hornera**.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + r$$

współczynniki  $b_i$  oraz resztę  $r$  znajdujemy korzystając z następującej tabelki:

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$c$	$a_n$	$cb_{n-1} + a_{n-1}$	$cb_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$cb_1 + a_1$	$cb_0 + a_0$
	$= b_{n-1}$	$= b_{n-2}$	$= b_{n-3}$		$= b_0$	$= r$

**Przykład** Podzielić wielomian  $f(x) = 2x^5 - 9x^4 + 4x^3 - x^2 + 27$  przez dwumian  $x - 4$ .

**Rozwiązanie** Korzystamy z powyższego algorytmu:

	2	-9	4	-1	0	27
4	2	-1	0	-1	-4	11

Zatem mamy  $f(x) = (x - 4)(2x^4 - x^3 - x - 4) + 11$ .

---

<sup>1</sup>E. Bezout (1730-1783) matematyk francuski