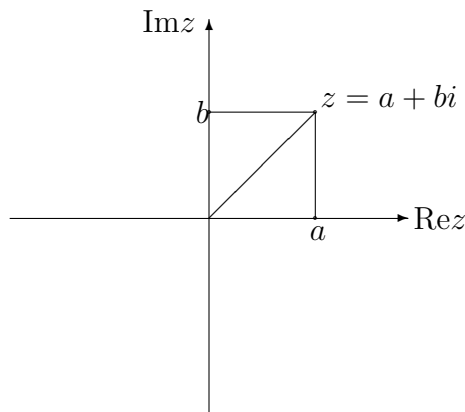


Wykład 7

Ciało liczb zespolonych cd.

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Każda liczba zespolona $z = a + bi$ jest opisana przez parę liczb rzeczywistych. Zatem można ją interpretować jako punkt (lub wektor) na płaszczyźnie o współrzędnych (a, b) :



Odległość liczby z od początku układu współrzędnych nazywamy **modułem liczby z** i oznaczamy go przez $|z|$.

$$\text{Jeśli } z = a + bi \text{ to } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zadanie Rozwiązać równanie $|z| + z = 0$.

Rozwiązanie Ponieważ $|z|$ interpretujemy jako odległość, więc $|z| \in \mathbb{R}$. Więc jeśli $z = -|z|$ to $\text{Im}(z) = 0$ zatem $z = a \in \mathbb{R}$. Stąd mamy $a + \sqrt{a^2} = 0$. Zatem rozwiązaniem równania są wszystkie liczby rzeczywiste mniejsze od zera.

Własności modułów liczb zespolonych

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
2. Jeśli $w \neq 0$ to $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Dowód Niech $t = \frac{|z+w|}{z+w}$, wtedy $|t| = 1$ i $t(z+w) = |z+w| \in \mathbb{R}$. Stąd mamy:

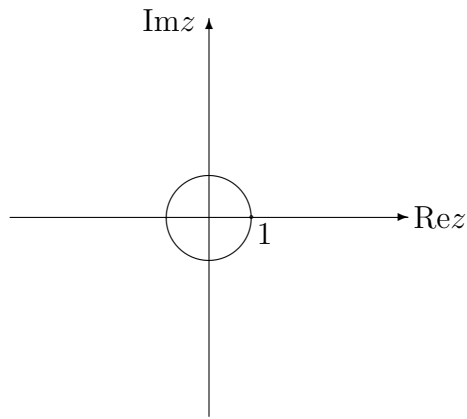
$$\begin{aligned} |z+w| &= t(z+w) = tz + tw = \text{Re}(tz + tw) = \\ &= \text{Re}(tz) + \text{Re}(tw) \leq |tz| + |tw| = |z| + |w|, \end{aligned}$$

4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

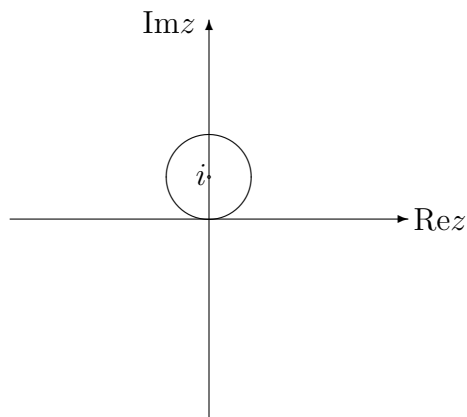
Zadanie Podać interpretację geometryczną zbioru $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ oraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$.

Rozwiązanie

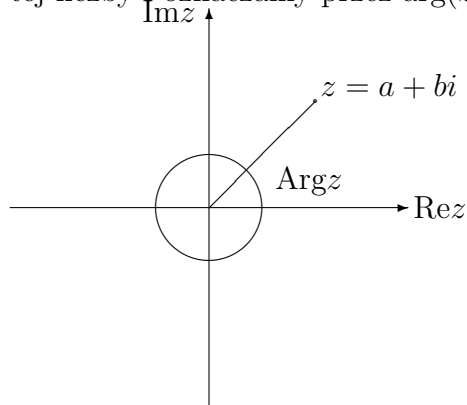
$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}:$$



Kąt α między dodatnią stroną osi Re, a promieniem wodzącym liczby z nazywamy argumentem tej liczby i oznaczamy przez $\arg(z)$.

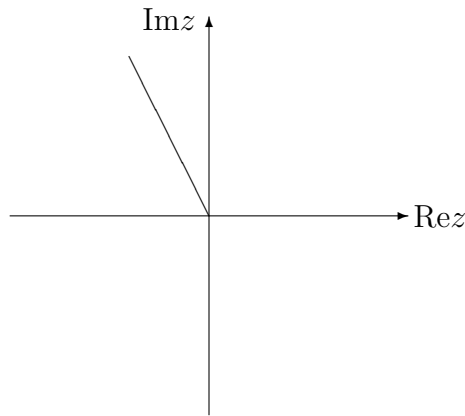


Argumentem liczby zespolonej jest zbiór liczb rzeczywistych bo np. argumentem liczby $1 + i$ jest zbiór $\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Argumentem głównym liczby z nazywamy ten z argumentów który zawarty jest w przedziale $[0, 2\pi)$. Argument główny liczby z oznaczamy przez $\text{Arg}(z)$, np. $\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie Narysować na płaszczyźnie zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}\}$.

Rozwiązanie



Jeśli α jest argumentem liczby $z = a + bi$ to mamy:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{|z|}$$

Jeśli $z = a + bi \neq 0$ to mamy:

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

postać tą nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z .

Przykład Niech $z = 1 - i$, wtedy $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

stąd $\text{Arg}(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, a więc postacią trygonometryczną liczby $z = 1 - i$ jest:

$$z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right).$$

Niech $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$ wtedy mamy:

1. $zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$ (wzór Moivre'a¹),
3. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$.

Dowód

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)|w|(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= |z||w|((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)) = \\ &= |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)), \end{aligned}$$

to daje dowód punktu 1.

Punkt 2. jest indukcyjnym uogólnieniem punktu 1., a punkt 3. udowadnia się podobnie jak punkt 1.

Zadanie Wyznaczyć liczbę $(-1 + i\sqrt{3})^{125}$.

¹Abraham de Moivre 1667-1754, matematyk angielski

Rozwiązanie Szukamy postaci trygonometrycznej liczby $z = -1 + i\sqrt{3}$. Mamy $|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\cos \alpha = \frac{-1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd $\text{Arg}(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$. Zatem:

$$z = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right).$$

Wykorzystując wzór Moivre'a mamy:

$$z^{125} = 2^{125} \left(\cos \frac{2 \cdot 125}{3}\pi + i \sin \frac{2 \cdot 125}{3}\pi \right),$$

ponieważ $2 \cdot 125 = 250 = 3 \cdot 83 + 1$, to:

$$z^{125} = 2^{125} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) = 2^{125} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Liczbę w nazywamy pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby zespolonej z , jeśli $w^n = z$.

Twierdzenie 1 Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z z . Jeśli $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ to pierwiastki n -tego stopnia z z wyrażają się wzorami:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n-1$, a $\sqrt[n]{|z|}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny z liczby rzeczywistej dodatniej $|z|$.

Dowód Jeśli w jest n -tym pierwiastkiem z $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ i $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$ to z równości $w^n = z$ i ze wzoru Moivre'a mamy:

$$\begin{cases} |w|^n = |z|, \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd $\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, jeśli $k > n$ to możemy podzielić k przez n z resztą. Otrzymamy wtedy $k = qn + r$, $0 \leq r < n$, i mamy $\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(qn+r)\pi}{n} = \frac{\alpha + 2r\pi}{n} + 2q\pi$. Ponieważ \sin i \cos są funkcjami o okresie 2π więc parzystą wielokrotność kąta π można odrzucić i mamy $\beta = \frac{\alpha + 2r\pi}{n}$ dla $0 \leq r < n$. Łatwo również sprawdzić, że dla $k \neq l$ mamy $\zeta_k \neq \zeta_l$. ■

Zadanie Wyznaczyć wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z liczby i .

Rozwiązanie Przedstawiamy liczbę i w postaci trygonometrycznej:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

Zgodnie z powyższym twierdzeniem pierwiastkami stopnia trzeciego z liczby i są:

$$z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

dla $k \in \{0, 1, 2\}$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, \\ z_1 &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, \\ z_2 &= \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = -i. \end{aligned}$$