

Wykład 6

Ciało liczb zespolonych

Rozważmy równanie $x^2 + 1 = 0$. Oczywiście równanie to nie ma rozwiązań w ciele liczb rzeczywistych. Pytanie, które nasuwa się w tym miejscu brzmi: Czy można tak rozszerzyć ciało liczb rzeczywistych, żeby otrzymać nowe ciało, w którym to równanie ma rozwiązanie (jedno z założeń jest takie aby nowe ciało zawierało ciało liczb rzeczywistych i musi być takie, żeby działania w tym ciele ograniczone do zbioru liczb rzeczywistych były zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia). Takie ciało można skonstruować. Oznaczmy przez i jedno z rozwiązań równania $x^2 + 1 = 0$ (oczywiście i nie jest liczbą rzeczywistą), a więc mamy $i^2 = -1$. Rozważmy zbiór elementów postaci $a + bi$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi. Te elementy możemy traktować jako pary liczb rzeczywistych to znaczy element $a + bi$ możemy utożsamiać z parą (a, b) . Równość $a + bi = c + di$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $a = c$ i $b = d$. Zbiór takich elementów oznaczamy będziemy przez \mathbb{C} i nazywać będziemy **zbiorem liczb zespolonych**, a każdy element tego zbioru nazywać będziemy **liczbą zespoloną**. Zapis $a + bi$ liczby zespolonej nazywamy **postacią algebraiczną (lub kanoniczną) liczby zespolonej**. Jeśli $z = a + bi$ jest liczbą zespoloną to liczbę rzeczywistą a nazywamy **częścią rzeczywistą liczby z** i oznaczamy ją przez $\operatorname{Re}(z)$, a liczbę rzeczywistą b nazywamy **częścią urojoną liczby z** i oznaczamy ją przez $\operatorname{Im}(z)$. Na przykład $\operatorname{Re}(2 - 3i) = 2$, a $\operatorname{Im}(2 - 3i) = -3$. Liczby zespolone są więc elementami postaci:

$$a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

W zbiorze liczb zespolonych można wprowadzić działania dodawania i mnożenia, które oznaczamy będziemy przez $+$ i \cdot . Oto ich definicje:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ac + bd)i,$$

elementem neutralnym $+$ jest $0 + 0i$, a mnożenia $1 + 0i$.

Liczby postaci $a + 0i$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi. Mamy zatem $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Przykład Wykonajmy działania:

$$(3 + 2i) - (5 + 4i) = -2 - 2i$$

$$(2 + 3i)(3 - 4i) = 18 + i$$

$$(2 + 4i)^2 = 4 + 16i - 16 = -12 + 16i$$

Zadanie Wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y dla których:

$$(x + iy)(2 - i) = 2i$$

Rozwiązanie

$$(x + iy)(2 - i) = 2x + y + (-x + 2y)i = 2i$$

stąd mamy:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy $x = 2y - 2$ i podstawiając do pierwszego mamy $2(2y - 2) + 3y = 0$, stąd $7y = 4$, zatem $y = \frac{4}{7}$ i $x = 2\frac{4}{7} - 2 = \frac{8}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{6}{7}$.

Pokażemy teraz jak można wyznaczyć liczbę odwrotną do liczby $a + bi \neq 0$ to znaczy liczbę $\frac{1}{a+bi}$:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Jeśli liczba $a + bi \neq 0$ to $a \neq 0$ lub $b \neq 0$ i wtedy $a^2 + b^2 \neq 0$, a więc liczba $a + bi$ jest w tym przypadku odwracalna. Mamy więc $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Powyższe rozważania prowadzą nas do następującego stwierdzenia:

Twierdzenie 1 *Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem.*

Odwracając liczbę $a + bi$ wymnożyliśmy licznik i mianownik przez liczbę $a - bi$, liczbę tą nazywamy **liczbą sprzężoną** do liczby $z = a + bi$ i oznaczamy ją przez \bar{z} . Mamy zatem:

$$\text{Jeśli } z = a + bi \in \mathbb{C} \text{ to } \bar{z} = a - bi$$

Własności sprzężenia

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$,
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,
3. Jeśli $w \neq 0$ to $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,
4. Jeśli $z = a + bi$ to $z + \bar{z} = 2a$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Jeśli $z \neq 0$ to mamy:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

Zadanie Wyznaczyć wszystkie liczb zespolone z , które spełniają równanie:
 $\bar{z} = z$.

Rozwiązanie Jeśli $z = a + bi$ to $\bar{z} = a - bi$. Zatem mamy $a - bi = a + bi$, stąd $2bi = 0$ to oznacza, że $b = 0$. Zatem równość $\bar{z} = z$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy gdy $z \in \mathbb{R}$.

Zadanie Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z , dla których $z^2 = -5 + 12i$.

Rozwiązanie Niech $z = a + bi$, wtedy $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 12i$ to nam daje układ równań:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

z drugiego równania otrzymujemy $b = \frac{6}{a}$ i podstawiając do równania pierwszego otrzymujemy

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$$

mnożymy obustronnie przez a^2 :

$$a^4 - 36 = -5a^2$$

przenosimy na lewą stronę i podstawiamy $t = a^2$:

$$t^2 + 5t^2 - 36 = 0$$

zatem $\Delta = 25 + 144 = 169$, $\sqrt{169} = 13$, więc:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-5-13}{2} = -9 \\ t_2 &= \frac{-5+13}{2} = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ a jest liczbą rzeczywistą więc t musi być większe od zera. Zatem mamy:

$$a^2 = 4$$

stąd $a = \pm 2$, $b = \pm 3$. Poszukiwane liczby to:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -2 - 3i$$