Wykład 2

Działania

Z wcześniejszych kursów znamy pojęcie działań arytmetycznych w zbiorze liczb rzeczywistych $(+, -, \cdot, :)$.

Niech A będzie dowolnym zbiorem. Każdą funkcję $f : A^n \to A$ nazywamy (n-arnym) działaniem w zbiorze A. Jeśli $n = 2$ to działanie nazywamy binarnym. Dla działań binarnych często używamy oznaczeń $+, \cdot, \oplus, \odot, \Box, \diamond$ i podobnych, tradycyjnie nie używamy zapisu $+(a, b)$ tylko $a + b$.

Przykład

$+$ jest działaniem binarnym w zbiorach $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

$:$ nie jest działaniem binarnym w zbiorze $\mathbb{R}$ bo wyrażenie $a : 0$ jest nieokreślone.

$:$ nie jest również działaniem w zbiorze $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bo wartość dzielenia $1 : 2$ nie jest liczbą całkowitą.

Przykład Jeśli X jest dowolnym zbiorem to składanie funkcji jest działaniem binarnym w zbiorze X^X.

Jeśli A jest zbiorem skończonym, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a $\Box$ jest działaniem binarnym w tym zbiorze to działanie to można opisać przy pomocy tabelki:

$\Box$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
a_1	$a_1 \Box a_1$	$a_1 \Box a_2$	$\ldots$	$a_1 \Box a_n$
a_2	$a_2 \Box a_1$	$a_2 \Box a_2$	$\ldots$	$a_2 \Box a_n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_n	$a_n \Box a_1$	$a_n \Box a_2$	$\ldots$	$a_n \Box a_n$

Zadanie Opisać tabelkę składania funkcji w zbiorze X^X dla $X = \{1, 2\}$.

Rozwiązanie Jak wiemy $X^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gdzie:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wtedy na przykład:

$$f_2 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = f_1,$$

$$f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = f_4.$$

Tabelka ma postać:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

Własności działań binarnych. Działanie $\Box$ w zbiorze A nazywamy:

(a) łącznym jeśli:

$$\forall a, b, c \in A \;\; a\Box(b\Box c) = (a\Box b)\Box c,$$

(b) przemiennym jeśli:

$$\forall a, b \in A \;\; a\Box b = b\Box a.$$

Element $e \in A$ nazywamy prawostronnym elementem neutralnym jeśli:

$$\forall a \in A \;\; a\Box e = a.$$

Podobnie można mówić o lewostronnym elemencie neutralnym. Element $e \in A$ nazywamy elementem neutralnym działania $\Box$ jeśli jest prawo i lewostronnym elementem neutralnym.

Twierdzenie 1 *Każde działanie ma co najwyżej jeden element neutralny.*

Dowód Jeśli e_1 i e_2 są elementami neutralnymi to $e_1\Box e_2 = e_1$ i $e_1\Box e_2 = e_2$, więc $e_1 = e_2$.$\blacksquare$

Niech działanie $\Box$ posiada element neutralny e w zbiorze A i niech $a \in A$. Wtedy element $a' \in A$ nazywamy elementem odwrotnym do a (względem działania $\Box$) jeśli:

$$a\Box a' = a'\Box a = e.$$

Jeśli a posiada element odwrotny to nazywamy go *elementem odracalnym.*
Zadanie Wyznaczyć element neutralny składania w zbiorze X^X. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w zbiorze X^X dla $X = \{1, 2\}$.

Elementy odwracalne w zbiorze X^X nazywamy permutacjami zbioru X i oznaczamy je przez $S(X)$. Element jest $f \in X^X$ odwracalny dokładnie wtedy gdy f jest funkcją odwracalną (tzn jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru X na X). Jeśli $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ to zamiast $S(X)$ piszemy S_n.
Zadanie Wyznaczyć wszystkie permutacje zbioru $X = \{1, 2, 3\}$. Wyznaczyć tabelkę składania funkcji w zbiorze S_3.

Niech $\oplus$ i $\odot$ będą dwoma działaniami w zbiorze A. Wtedy mówimy, że działanie $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$ jeśli:

$$\forall a, b, c \in A \;\; a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c), (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

Zadanie Jakie własności mają działania $\cap, \cup$ w zbiorze 2^X?