

Wykład 1

Pojęcia wstępne

Będziemy używać, następujących oznaczeń:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ -zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ -zbiór liczb całkowitych,

\mathbb{Q} -zbiór liczb wymiernych,

\mathbb{R} -zbiór liczb rzeczywistych.

Wyżej wymienione zbiory spełniają następujące relacje:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór złożony ze wszystkich par (x, y) , takich że $x \in X, y \in Y$. Iloczyn kartezjański zbiorów X i Y oznaczamy przez $X \times Y$. Mamy więc:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Ogólniej jeśli X_1, X_2, \dots, X_n są dowolnymi zbiorami to iloczynem kartezjańskim $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ nazywamy zbiór:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Jeśli X jest zbiorem to przyjmujemy oznaczenie: $X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$

Uwaga 1 Jeśli X i Y są zbiorami skończonymi i $|X| = k, |Y| = l$ to mamy $|X \times Y| = kl$ oraz $|X^n| = k^n$.

Odwzorowanie f zbioru A w zbiór B nazywamy **funkcją** jeśli każdemu elementowi zbioru A przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru B i piszemy symbolicznie:

$$f : A \rightarrow B$$

lub

$$A \xrightarrow{f} B$$

Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji, a zbiór B zbiorem wartości. Jeśli A i B są dowolnymi zbiorami to przez B^A oznaczamy zbiór wszystkich funkcji przekształcających zbiór A w zbiór B :

$$B^A = \{f : A \xrightarrow{f} B\}$$

Przykład Niech $X = \{1, 2\}$. Wtedy X^X jest zbiorem funkcji przekształcających X w X . Zbiór X^X składa się z następujących funkcji:

$$f_1: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array}, \quad f_2: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array}, \quad f_3: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array}, \quad f_4: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array}.$$

W przypadku gdy X jest zbiorem skończonym, składającym się z elementów x_1, x_2, \dots, x_n , to funkcję $f \in X^X$ możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Dla $X = \{1, 2\}$ mamy:

$$X^X = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jeśli X jest dowolnym zbiorem to przez 2^X oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X . Mamy więc $A \in 2^X \iff A \subseteq X$.

Przykład Niech $X = \{1, 2, 3\}$. Wtedy mamy

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Twierdzenie 1 *Jeśli X jest zbiorem skończonym i $|X| = n$ to $|2^X| = 2^n$.*

Dowód Zbiór X jest skończony i ma n elementów, więc $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Każdy podzbiór wiąże się z wyborem pewnych jego elementów, a więc pewnych numerów. Możemy więc określić odwzorowanie:

$$\xi : 2^X \rightarrow \{0, 1\}^n$$

podzbiorów zbioru X w zbiór wszystkich n -elementowych ciągów zero-jedynkowych. Jeśli A jest podzbiorem zbioru X to przyporządkowujemy mu ciąg (a_1, a_2, \dots, a_n) taki, że

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in A \\ 0 & \text{jeśli } x_i \notin A. \end{cases}$$

Na przykład:

$$\begin{array}{ll} \emptyset & \rightarrow (0, 0, \dots, 0) \\ X & \rightarrow (1, 1, \dots, 1) \\ \{x_1\} & \rightarrow (1, 0, \dots, 0) \end{array}$$

Nietrudno zauważyć, że każdemu podzbiorni odpowiada dokładnie jeden ciąg, różnym podzbiornom odpowiadają różne ciągi i każdy ciąg odpowiada

pewnemu podzbirowi. Zatem elementów zbioru 2^X jest dokładnie tyle samo co elementów zbioru $\{0, 1\}^n$, a tych ostatnich jest 2^n . ■

Przykład Zilustrujmy działanie funkcji ξ , zdefiniowanej w dowodzie twierdzenia na przykładzie zbioru $X = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{l} \xi : \\ \emptyset \quad \rightarrow (0, 0, 0) \\ \{1\} \quad \rightarrow (1, 0, 0) \\ \{2\} \quad \rightarrow (0, 1, 0) \\ \{3\} \quad \rightarrow (0, 0, 1) \\ \{1, 2\} \rightarrow (1, 1, 0) \\ \{1, 3\} \rightarrow (1, 0, 1) \\ \{2, 3\} \rightarrow (0, 1, 1) \\ \{1, 2, 3\} \rightarrow (1, 1, 1) \end{array}$$